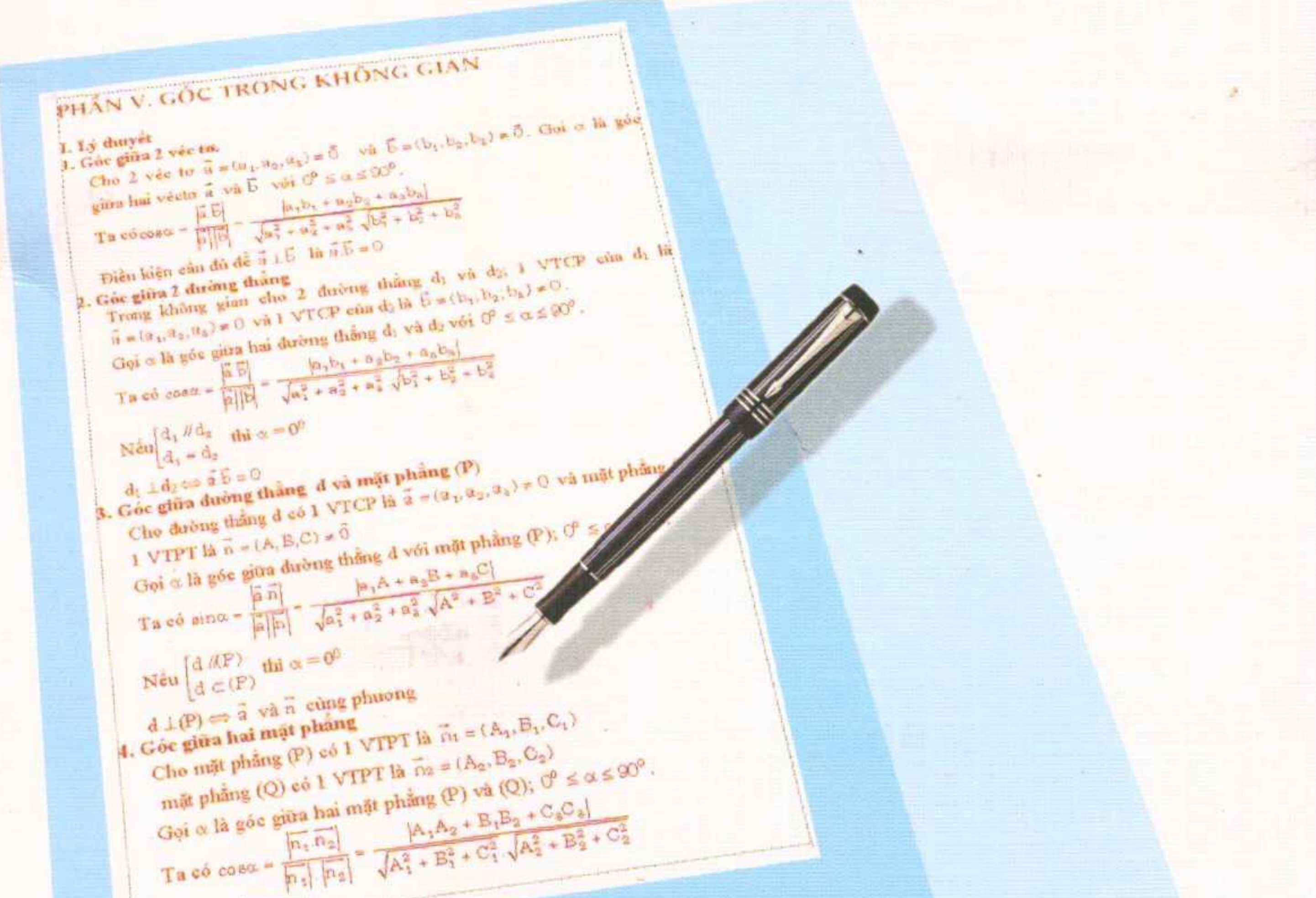
HỒ SĨ VINH
(Khoa Toán trường ĐH Sư phạm Hà Nội II)

NHỮNG BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Hình học giải tích

Dành cho HS lớp 11, 12 chương trình cơ bản - phân ban và nâng cao.

Nâng cao kĩ năng giải toán, chuẩn bị cho các kì thi quốc gia
TN THPT - Tuyển sinh ĐH-CĐ, theo hướng ra đề thi mới.



PHẦN V. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. Lý thuyết

1. Góc giữa 2 véc tơ.

Cho 2 véc tơ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\neq\vec{0}$ và $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\neq\vec{0}$. Gọi α là góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $0^\circ\le\alpha\le 90^\circ$.

Ta có $\cos\alpha=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Điều kiện cần đủ để $\vec{a}\perp\vec{b}$ là $\vec{a}.\vec{b}=0$

2. Góc giữa 2 đường thẳng

Trong không gian cho 2 đường thẳng d_1 và d_2; 1 VTCP của d_1 là $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ và 1 VTCP của d_2 là $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\neq 0$.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 với $0^\circ\le\alpha\le 90^\circ$.

Ta có $\cos\alpha=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Nếu $\left[\begin{array}{l}d_1 /\!/ d_2\\ d_1\equiv d_2\end{array}\right.$ thì $\alpha=0^\circ$

$d_1\perp d_2\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$

3. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Cho đường thẳng d có 1 VTCP là $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ và mặt phẳng

1 VTPT là $\vec{n}=(A,B,C)\neq\vec{0}$

Gọi α là góc giữa đường thẳng d với mặt phẳng (P); $0^\circ\le$

Ta có $\sin\alpha=\frac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|}=\frac{|a_1A+a_2B+a_3C|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Nếu $\left[\begin{array}{l}d /\!/ (P)\\ d\subset(P)\end{array}\right.$ thì $\alpha=0^\circ$

$d\perp(P)\Leftrightarrow\vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương

4. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$

mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q); $0^\circ\le\alpha\le 90^\circ$.

Ta có $\cos\alpha=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HỒ SĨ VINH
(Khoa Toán trường ĐH Sư phạm Hà Nội II)

NHỮNG BÀI TOÁN CHỌN LỌC
Hình học giải tích

Dành cho HS lớp 11, 12 chương trình Cơ bản - Phân ban và Nâng cao.

✓ Kiến thức cơ bản.
✓ Phương pháp giải từng loại bài tập.
✓ Các dạng bài tập điển hình hay và đa dạng.
✓ Bám sát chuẩn kiến thức và kĩ năng.
✓ Giới thiệu các đề thi hình học giải tích của các trường và Bộ GD&ĐT.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Phần I. Véc tơ – các phép toán về véc tơ trong không gian 5

Phần II. Phương trình mặt phẳng 25

Phần III. Phương trình đường thẳng 40

Phần IV. Vị trí tương đối của đường thẳng – Mặt phẳng 82

Phần V. Góc trong không gian 93

Phần VI. Khoảng cách 101

Phần VII. Mặt cầu 128

Phần VIII. Một số bài tập tổng hợp 156

Phần phụ lục. Các đề thi tuyển sinh vào đại học 206

PHẦN I. VÉC TƠ – CÁC PHÉP TOÁN VỀ VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

I. Hệ tọa độ trong không gian

Hệ tọa độ trong không gian là hệ gồm ba trục x'ox, y'oy, z'oz vuông góc với nhau từng đôi một.

Trên mỗi trục nói trên lần lượt đặt các véc tơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Kí hiệu hệ trục oxyz hay (o; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

+ Điểm 0 gọi là gốc tọa độ.

+ Các trục x'ox; y'oy; z'oz được gọi là trục hoành, trục tung, trục cao.

+ Các mặt phẳng (xoy), (yoz), (oxz) gọi là các mặt phẳng tọa độ.

II. Tọa độ của một điểm

Trong không gian với hệ trục oxyz, với mỗi điểm M tồn tại bộ ba số (x; y; z) duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

+ x: được gọi là hoành độ của điểm M

+ y: được gọi tung độ của điểm M

+ z: được gọi là cao độ của điểmM

Bộ ba số (x; y; z) được gọi là tọa độ của điểm M

Kí hiệu M(x; y; z) hay M = (x; y; z).

Vậy: M (x; y; z) ⇔ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

III. Tọa độ của một véc tơ

Trong không gian cho hệ trục oxyz và một véc tơ $\vec{u}$. Khi đó tồn tại bộ ba số (x; y; z) duy nhất sao cho $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Bộ ba số (x; y; z) được gọi là tọa độ của véc tơ $\vec{u}$ = (x; y; z)

Vậy: $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Suy ra:
- Véc tơ đơn vị trên trục hoành $\vec{i} = (1; 0; 0)$
- Véc tơ đơn vị trên trục tung: $\vec{j} = (0; 1; 0)$
- Véc tơ đơn vị trên trục cao: $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Ta được $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ tức $\vec{i}.\vec{k} = 0$, $\vec{i}.\vec{j} = 0$

$\vec{j}.\vec{k} = 0$ và $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

IV. Biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ

Cho các véctơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$

$\vec{w} = (x_3; y_3; z_3)$; $k \in R$ ta có:

1) $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$

2) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

3) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$; $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$

4) $k\vec{u} = (kx_1; ky_1; kz_1)$

5) Tích vô hướng của 2 véc tơ là một số thực $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \in R$

6) Độ dài của véc tơ $\vec{u}$: kí hiệu $|\vec{u}| = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2}$

7) Góc giữa 2 véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + y_1{}^2} . \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$

8) $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$

Kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} . \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

9) $\vec{u}$ và $-\vec{u}$ là 2 véc tơ đối của nhau khi và chỉ khi $\vec{u} + (\overrightarrow{-u}) = \vec{0}$

10) Cho A $(x_A; y_A; z_A)$; B $(x_B; y_B; z_B)$ ta được:

Véc tơ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Độ dài véc tơ $\overrightarrow{AB} : AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = BA$

11) Điểm M chia đoạn AB theo tỷ số k $(k \neq 1)$

Khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$

I là trung điểm của đoạn AB

Khi $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

12) Tích có hướng của hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một véc tơ. Ký hiệu $[\vec{u}, \vec{v}]$ hay $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ có tọa độ:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; x_1y_2 - x_2y_1)$$

Tính chất của tích có hướng của 2 véc tơ:

+ $[\vec{u}, \vec{v}] \neq [\vec{u}, \vec{v}]$

+ $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương

+ $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{u}$ và $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{v}$

+ $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right| = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

+ $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}$ là một số thực (gọi là tích hỗn tạp của 3 véc tơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$), 3 véc tơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=0$

14) Một số công thức tính diện tích, thể tích áp dụng véc tơ.

(1) Diện tích hình bình hành ABCD:

$$\text{dt } ABCD = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|$$

(2) Diện tích tam giác ABC $= \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

(3) Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D' = V

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$$

(4) Thể tích khối tứ diện ABCD

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AC}\right|$$

(5) $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u}, + \vec{v}|$

$|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$

B. BÀI TẬP

I. Bài tập áp dụng có lời giải

Bài 1: Cho ba véc tơ: $\vec{a}=(1;-1;2), \vec{b}=(-2;1;0)\ \vec{c}=(0;4;3)$

1) Tính $\vec{a}.\vec{b};\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}$; xét sự đồng phẳng của 3 véc tơ $\vec{a},\vec{b};\vec{c}$

2) Tìm tọa độ của véc tơ $\vec{u}=2\vec{a}+5\vec{b}-3\vec{c}$

3) Tìm tọa độ của véc tơ $\vec{d}$ sao cho:

$\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}+5\vec{d}=\vec{0}$

Bài giải

Bài tập này chỉ áp dụng công thức:

1) $\vec{a}.\vec{b} = 1(-2)+(-1)1+2.0=-3.$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right) = (-2;-4;-1)\neq\vec{0}$$

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}=(-2)(-2)+1(-4)+0(-1)=0$

Vậy 3 véc tơ $\vec{a},\vec{b};\vec{c}$ đồng phẳng.

2) Ta có $\left.\begin{aligned}2\vec{a}&=(2;-2;4)\\ 5\vec{b}&=(-10;5;0)\\ -3\vec{c}&=(0;-12;-9)\end{aligned}\right\}\vec{u}=(-8;-9;-5)$

3) Gọi $\vec{d} = (x_0; y_0; z_0)$ vì $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} + 5\vec{d} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{d} = -\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ (1) ta có:

$5\vec{d} = (5x_0; 5y_0; 5z_0)$

$$\text{Vì } \begin{cases} -\vec{a} = (-1; 1; -2) \\ -2\vec{b} = (4; -2; 0) \\ 3\vec{c} = (0; 12; 9) \end{cases}$$

$-\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = (3; 11; 7)$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 = 3 \\ 5y_0 = 11 \\ 5z_0 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{5} \\ y_0 = \dfrac{11}{5} \\ z_0 = \dfrac{7}{5} \end{cases} \text{ vậy } \vec{d} = \left(\frac{3}{5}; \frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

Bài 2: Cho 3 điểm A(0; 3; 1), B(3; 0; –1); C(0; 4; 3)

1) a) Chứng minh rằng A, B, C là 3 đỉnh của tam giác.

b) Tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

c) Tìm điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

2) Tìm tọa độ điểm M để:

a) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MA}$

b) $y = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|$. Tính y

3) Tìm trọng tâm G của tam giác ABC. Chứng minh 3 điểm A, G, M (với M tìm được ở câu a) thẳng hàng.

Bài giải

1) a) Để chứng minh 3 điểm A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác ta tính tích có hướng của 2 véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, hoặc $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$, hoặc $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$. Và chứng minh cho 3 điểm ABC không thẳng hàng khi hoặc là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ hoặc $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$ hoặc $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ không cùng phương.

Ở đây tính $\overrightarrow{AB} = (3; -3; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 1; 2)$

$$+ \text{ Tính } \left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right| = \left(\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-4; -6; 3) \neq \vec{0}$$

Vậy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, 3 điểm A, B, C không thẳng hàng nên nó là 3 đỉnh của tam giác.

b) Để tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, bằng r. Áp dụng công thức: $S = pr \Leftrightarrow r = \dfrac{S}{p}$

Trong đó: S = diện tích ΔABC

$p = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$ r: bán kính đường tròn nội tiếp

Ta có: $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+36+9} = \frac{1}{2}\sqrt{61}$

$p = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$, với $AB = \sqrt{22}$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{41}$

Vậy $p = \frac{1}{2}(\sqrt{22} + \sqrt{41} + \sqrt{5})$

Do đó $r = \dfrac{\sqrt{61}}{\sqrt{22} + \sqrt{41} + \sqrt{5}}$ (đơn vị dài)

c) Để tìm điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Giải phương trình $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ hoặc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Hoặc lấy O là trung điểm AC và tìm điểm D sao cho: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}$

Ở đây: ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (1)

Tính $\overrightarrow{BC} = (-3; 4; 4)$

$\overrightarrow{AD} = (x_D - 0, y_D - 3, z_D - 1)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D - 3 = 4 \\ z_D - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 6 \\ z_D = 5 \end{cases}$$

Đáp số: D(−3; 7; 5)

2) a) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MA}$ (2) tìm toạ độ điểm M

Cách 1: Tính $\overrightarrow{MB} = (3 - x_M; -y_M; -1 - z_M)$

$\overrightarrow{MC} = (-x_M; 4 - y_M; -z_M + 3)$

$\overrightarrow{MA} = (-x_M; 3 - y_M; 1 - z_M)$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x_M = -6x_M \\ 4 - 2y_M = 18 - 6y_M \\ 2 - z_M = 6 - 6z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\dfrac{3}{4} \\ y_M = \dfrac{7}{2} \\ z_M = \dfrac{4}{5} \end{cases} \text{ được } \overrightarrow{M} = \left(-\frac{3}{4}; \frac{7}{2}; \frac{4}{5}\right)$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm BC

$(2) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} = 6\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MA}$

Giải phương trình tìm toạ độ điểm M

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{CI}$

Với I là trung điểm AB, $I(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0)$

$y = 2\left|\overrightarrow{CI}\right| = 2\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4} + 9} = \sqrt{70}$

3) Tọa độ tâm G: $\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = 1 \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = \frac{7}{3} \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = 1 \end{cases}$.

$\overrightarrow{AG} = (1; -\frac{2}{3}; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$. Vậy 3 điểm A, M, G thẳng hàng.

Bài 3: Cho $\vec{a} = (1; 1; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$, $\vec{c} = (2; 3; -1)$.

Tìm tọa độ véc tơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}$ vuông góc với véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{x}.\vec{b} = -5$, $\vec{c}.\vec{x} = 5$

Bài giải

Gọi $\vec{x} = (x_0; y_0; z_0)$

Để $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x}.\vec{a} = 0 \\ \vec{x}.\vec{b} = -5 \\ \vec{x}.\vec{c} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 0 \\ x_0 - y_0 + 2z_0 = -5 \\ 2x_0 + 3y_0 - z_0 = 5 \end{cases}$

Giải hệ được $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$

Đáp số: $\vec{x} = (-1; 2; -1)$

Bài 4: Cho tam giác ABC, biết $\overrightarrow{OA} = (2; 1; -3)$, $\overrightarrow{OB} = (4; 3; -2)$, $\overrightarrow{OC} = (0; 2; -1)$

1) Tính góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC
2) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC
3) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (xOy) tại điểm M. Tìm tọa độ điểm M và điểm M chia đoạn AB theo tỷ số nào?

Bài giải

1) Từ giả thiết ta được A(2; 1; –3), B(4; 3; –2), C(0; 2; –1)

   nên $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 1; 2)$

   Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2(-2) + 2 + 2 = 0$ vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên tam giác ABC vuông tại A: $\widehat{BAC} = 90$

2) Ta có AB = 3, AC = 3, BC = $3\sqrt{2}$ nên chu vi của tam giác ABC:

   $2p = AB + AC + BC = 3(2 + \sqrt{2})$ (đơn vị dài)

   Diện tích ΔABC: $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{9}{2}$ (đvdt)

3) Điểm M ∈ (xOy) nên $z_M = 0$. Giả sử điểm M chia đoạn AB theo tỷ số k (k ≠ 1)

Ta có: $\begin{cases} x_M = \dfrac{2-4k}{1-K} \\ y_M = \dfrac{1-3k}{1-k} \\ z_M = \dfrac{-3+2k}{1-k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{2} (\neq 1) \Leftrightarrow$ Vậy M(8; 7; 0)

Bài 5: Cho hai điểm A(1; 2; −1), B(−1; 3; 1). Tìm điểm M trên trục tung sao cho tam giác AMB là tam giác vuông

Bài giải

Gọi điểm M(0; b; 0) $\in$ Oy. Tam giác AMB vuông có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: Tam giác AMB vuông tại M:

Khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ (1) với $\overrightarrow{MA} = (1; 2-b; -1)$

$\overrightarrow{MB} = (-1; -b+3; 1)$. Vậy (1) $\Leftrightarrow -1 + (2-b)(3-b) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow b^2 - 5b + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 4 \end{array}\right.$

Ta được 2 điểm M: $M_1(0; 1; 0)$, $M_2(0; 4; 0)$

Trường hợp 2: Tam giác AMB vuông tại A:

Khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$ (2) với $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (-1; b-2; 1) \\ \overrightarrow{AB} = (-2; 1; 2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow (-2)(-1) + 1(b-2) + 2.1 = 0 \Leftrightarrow b + 2 = 0$

$\Leftrightarrow b = -2$, được điểm $M_3(0; -2; 0)$

Trường hợp 3: Tam giác ABC vuông tại B:

Khi và chỉ khi $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA} = 0$ (3)

Với $\begin{cases} \overrightarrow{BM} = (1; b-3; -1) \\ \overrightarrow{BA} = (2; -1; -2) \end{cases}$ (3) $\Leftrightarrow 2 + 3 - b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = 7$

được $M_4(0; 7; 0)$

Đáp số:

*Tam giác ABM vuông tại M: $M_1(0; 1; 0)$, $M_2(0; 4; 0)$

*Tam giác ABM vuông tại A được $M_3(0; -2; 0)$

*Tam giác ABM vuông tại B được $M_4(0; 7; 0)$

Bài 6: Cho (S) là mặt cầu qua 3 điểm A(1; 1; 1), B(−1; 1; 0); C(3; 1; −1) và có tâm I nằm trên mặt phẳng (xOz). Tìm tọa độ tâm I và bán kính của mặt cầu (S)

Bài giải

Gọi điểm I(a; 0; c) $\in$ (xOz) là tâm của (S) khi và chỉ khi điểm I cách đều A, B, C.

Tức là

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + 1 + (c-1)^2 = (a+1)^2 + 1 + c^2 \\ (a-1)^2 + 1 + (c-1)^2 = (a-3)^2 + 1 + (c+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ a - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ c = -\frac{7}{6} \end{cases} \text{ được I } (\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6})$$

Bán kính mặt cầu (s): $R = IA = \sqrt{(1-\frac{5}{6})^2 + 1 + (1+\frac{7}{6})^2}$

$$R = \frac{\sqrt{206}}{6}$$

Bài 7: Cho tam giác ABC với A(1; –1; –3), B(2; 1; –2), C(–5; 2; –6). Tính độ dài đường phân giác trong AD của góc A.

Bài giải

Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC, ta có:

$\frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{AC}{AB}$ (1), gọi D(a; b; c)

Ta có: $\overrightarrow{DC} = (-5-a; 2-b; -6-c)$; $AC = 3\sqrt{6}$

$\overrightarrow{DB} = (2-a; 1-b; -2-c)$; $AB = \sqrt{6}$; $\frac{AC}{AB} = 3$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{DB}} = -3 \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = -3\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - a = -6 + 3a \\ 2 - b = -3 + 3b \\ -6 - c = 6 + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{4} \\ c = -3 \end{cases}$$

Ta được $D(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -3)$

Nên $AD = \sqrt{(1-\frac{1}{4})^2 + (\frac{5}{4}+1)^2 + [-3-(-3)]^2} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$

Bài 8: Cho tứ diện ABCD với A(2; 1; 0), B(1; 1; 3), C(2; –1; 3), D(1; –1; 0)

1) Chứng minh rằng tứ diện ABCD có các cạnh đối đôi một bằng nhau.

2) Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD.

3) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD.

4) Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài giải

1) Áp dụng công thức tính độ dài đoạn thẳng ta tính được

$AB = CD = \sqrt{10}$; $AC = BD = \sqrt{13}$; $AD = BC = \sqrt{5}$

Vậy tứ diện ABCD có các cạnh đối đôi một bằng nhau

2) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 3)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; -3)$ gọi φ là góc giữa AB và CD,

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{|-8|}{\sqrt{10}.\sqrt{10}} = \frac{4}{5}$$

Vậy góc giữa AB và CD là $\varphi = \arccos 0{,}8$

3) Lấy I trung điểm của AB, J là trung điểm của CD

$\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c) nên 2 đường trung tuyến tương ứng AJ = BJ. Vậy ΔAJB cân đỉnh J nên IJ vuông góc với AB tại I. Tương tự ΔICD cân đỉnh I nên IJ vuông góc với CD tại J. Vậy IJ là đường vuông góc chung của AB và CD ta được $I(\frac{3}{2}; 1; \frac{3}{2})$ và $J(\frac{3}{2}; -1; \frac{3}{2})$ vậy khoảng cách giữa AB và CD chính là độ dài đoạn vuông góc chung IJ.

$$d(AB; CD) = IJ = \sqrt{(\frac{3}{2} - \frac{3}{2})^2 + [1 - (-1)]^2 + (\frac{3}{2} - \frac{3}{2})^2} = 2$$

4) Theo kết quả câu 3. Lấy G là trung điểm của IJ ta được:

GA = GB vì ΔGAB cân đỉnh G

GC = GD vì ΔGCD cân đỉnh G

Mà $GA = \sqrt{GI^2 + IA^2}$ mà GI = GJ, IA = ID

$GC = \sqrt{GJ^2 + ID^2}$

Do đó GA = GB = GC = GD = R

Do đó G: Tâm mặt cầu ngoại tuyến khối tứ diện ABCD: $G(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2})$ và bán kính của mặt cầu là $R = GA = \frac{\sqrt{14}}{2}$

(G: cũng chính là trọng tâm của khối tứ diện gần đều ABCD)

Bài 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 3 véc tơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 1; 1)$, $\vec{c} = (x; 1; -2)$. Tìm x để 3 véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

Bài giải

Tính $$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; -4; 3)$$

Vậy $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = -x - 10$

Điều kiện cần đủ để 3 véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là:

$\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0 \Leftrightarrow -x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -10$

Đáp số: $x = -10$

Bài 10: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm M(1; 2; 3)

1) Gọi M_1; M_2; M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên các mặt phẳng (Oxy); (Oyz); và (Oxz). Tính diện tích của tam gác $M_1M_2M_3$

2) Gọi D; E; F lần lượt là các điểm đối xứng của M qua 3 mặt phẳng (Oxy); (Oyz); (Oxz). Tính diện tích của tam giác DEF.

(3) Gọi G; H; K lần lượt là các điểm đối xứng của M qua 3 trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Tính diện tích của tam giác GHK.

Bài giải

1) Hình chiếu của điểm M trên mp(Oxy) là $M_1(1; 2; 0)$ trên mp(Oyz) là $M_2(0; 2; 3)$. Trên (Oxz) là $M_3(1; 0; 3)$

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 0; 3)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (0; -2; 3)$

Tính $\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = (6; 3; 2)$

Diện tích $\Delta M_1M_2M_3 = S_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{7}{2}$ (đvdt)

2) D là điểm đối xứng của M qua mp(xOy): D(1; 2; –3)

E là điểm đối xứng của M qua mp(yOz): E(–1; 2; 3)

F là điểm đối xứng của M qua mp(xOz): F(1; –2; 3)

Ta có: $\overrightarrow{DE} = (-2; 0; 6)$, $\overrightarrow{DF} = (0; -4; 6)$

Tính $\left[\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF}\right] = (24; 12; 8)$

Diện tích $\Delta DEF = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{24^2 + 12^2 + 8^2} = 14$ (đvdt)

3) Các điểm đối xứng của M qua Ox, Oy, Oz lần lượt là G, H, K

Gọi $M_0(1; 0; 0) \in Ox$ thì M_0 là trung điểm của GM. Nên

$$\begin{cases} x_G = 2x_{M_0} - x_M = 1 \\ y_G = 2y_{M_0} - y_M = -2 \text{ ta được } G(1; -2; -3) \\ z_G = 2z_{M_0} - z_M = -3 \end{cases}$$

Tương tự H(–1; 2; –3), K(–1; –2; 3)

Ta có $\overrightarrow{GH} = (-2; 4; 0)$, $\overrightarrow{GK} = (-2; 0; 6)$

$\left[\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GK}\right] = (24; 12; 8)$

Vậy diện tích GHK $= \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GK}\right]\right\| = 14$ (đvdt)

Bài 11: Trong hệ trục Oxyz, cho 3 điểm A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1)

1) Chứng minh rằng A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác. Tính diện tích của tam giác ABC.

2) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành

3) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC hạ từ A

4) Tính thể tích của khối chóp SABCD với đỉnh S(0; 3; 4)

Bài giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 0;\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1;\ 1;\ 1)$

Tính $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1;\ 2;\ -1) \neq \vec{0}$

Do đó: 2 véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác

Diện tích tam giác ABC:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (đvdt)}$$

2) ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Gọi D(x; y; z) ta có: $\overrightarrow{AD}$ $(x - 1;\ y;\ z)$; $\overrightarrow{BC} = (2;\ 1;\ 0)$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Đáp số: D(3; 1; 0)

3) Diện tích $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow AH = \dfrac{\sqrt{6}}{BC}$. Ta có $BC = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow AH = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$ (đơn vị dài)

4) Thể tích của khối chóp SABCD = V

Ta có $V = 2V_{SABC} = \dfrac{1}{3}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AS}\right|$

Tính $\overrightarrow{AS} = (-1;\ 3;\ 4)$ do kết quả câu 1

Nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AS} = 1 + 6 - 4 = 3 > 0$

Do đó V = 1 (đvtt)

Bài 2: Cho 3 điểm A(2; 0; 4), B(4; $\sqrt{3}$; 5) và C(sin5t; cos3t; sin3t). Tìm t để AB vuông góc với OC (O là gốc tọa độ)

Bài giải

Tính $\overrightarrow{AB} = (2;\ \sqrt{3};\ 1)$, $\overrightarrow{OC} = (\sin 5t;\ \cos 3t;\ \sin 3t)$

$AB \perp OC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 2\sin 5t + \sqrt{3}\cos 3t + \sin 3t = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 3t + \sin 3t = -2\sin 5t \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\sin 3t = -\sin 5t$$

$$\Leftrightarrow \sin 3t \cos\frac{\pi}{3} + \cos 3t \sin\frac{\pi}{3} = -\sin 5t \Leftrightarrow \sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-5t)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t + \dfrac{\pi}{3} = -5t + 2k\pi \\ 3t + \dfrac{\pi}{3} = \pi + 5t + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{4} \\ t = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 13: Cho hình chóp SABC, đường cao SA = h, đáy là tam giác ABC vuông tại C, AC = b, BC = a, gọi M là trung điểm của AC, N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

1) Tính độ dài đoạn thẳng MN

2) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN $\perp$ SB

Bài giải

Đặt hình chóp SAB là hệ trục Oxyz. Với A ≡ 0 điểm C thuộc tia Ox C(b; 0; 0), điểm B thuộc mặt phẳng xOy B(b; a; 0), điểm S thuộc tia Oz S(0; 0; h); trung điểm M của AC: $M(\frac{b}{2}; 0; 0)$

Điểm N $\in$ đoạn SB. Vì $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ nên $N(\frac{1}{3}b; \frac{1}{3}a; \frac{2}{3}h)$ với a, b, h > 0

1) $MN = \sqrt{(\frac{b}{2} - \frac{b}{3})^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}h^2} = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 4h^2}$

2) MN $\perp$ SB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0$

$\overrightarrow{MN}(\frac{-b}{6}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3})$, $\overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$

Vậy $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow -\frac{b^2}{6} + \frac{a^2}{3} - \frac{2h^2}{3} = 0$

$\Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2$ với $0 < b < a\sqrt{2}$

Bài 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(−2; 1; −1)

1) Chứng minh rằng A, B, C, D là 4 đỉnh của một khối tứ diện.

2) Tính thể tích của khối tứ diện

3) Tính độ dài đường cao hạ từ A của khối tứ diện ABCD

Bài giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3; 1; -1)$.

Ta được $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (1; 1; 1)$

Vậy $[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = -3 \neq 0$ nên 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng nên A, B, C, D là 4 đỉnh của một khối tứ diện.

2) Thể tích của khối tứ diện ABCD

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|-3| = \frac{1}{2}$ (đvtt)

3) Độ dài đường cao của khối tứ diện ABCD kẻ từ A bằng h. Ta có

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}h\,S_{\Delta BCD} \Leftrightarrow h = \frac{3V}{S_{\Delta BCD}}$. Tính diện tích tam giác BCD

$\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -1)$ nên $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (1; -2; -2)$

Và $\left|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$

Vậy diện tích $\Delta BCD = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{3}{2}$

Do đó $h = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$, h = 1 (đơn vị độ dài)

Bài 15: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho bốn điểm A(0; 1; 1), B(0; 2; 3), C(2; 4; 2), D(2; 3; 0)

1) Chứng tỏ rằng 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng

2) Chứng minh rằng tứ giá ABCD là một hình chữ nhật. Tính diện tích của hình chữ nhật đó.

3) Thực hiện phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{AM}$ với M(1; 2; 5), hình chữ nhật ABCD biến thành hình chữ nhật MNPQ. Tìm tọa độ các điểm N, P, Q. Tính diện tích mặt chéo BDQN của khối hộp ABCD.MNPQ.

4) Tính thể tích của khối hộp ABCD. MNPQ

Bài giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 2; 1)$ nên $[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}] = (-5; 4; -2)$ vậy $[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AC} = 0$. Do đó 3 véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Vậy 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trong một mặt phẳng.

2) Từ $[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}] = (-5; 4; 2) \neq \vec{0}$ suy ra 3 điểm A, B, C không thẳng hàng cùng với $\overrightarrow{AB} = (0; 1; 2) = \overrightarrow{DC} = (0; 1; 2)$ tức là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Do đó ABCD là hình bình hành, ngoài ra: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ nên $AB \perp AD$ vậy ABCD là hình chữ nhật.

Diện tích hình chữ nhật ABCD: $S_{ABCD} = AB.AD = 3\sqrt{5}$

3) Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{AM}$ biến ABCD thành hình chữ nhật MNPQ. Nên $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AM}$ mà $\overrightarrow{AM} = (1; 1; 4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AM} = -9 \neq 0$

Do đó $M \notin mp(ABCD)$.

Ta có $\overrightarrow{BN} = (x_N, y_N - 2; z_N = 3)$ giải $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM}$ ta được N(1; 3; 7).
Tương tự ta được P(3; 5; 6), Q(3; 4; 4)

Do $\overrightarrow{BN} = (1; 1; 4)$, $\overrightarrow{BD} = (2; 1; -3)$. Ta có $[\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BD}] = (-7; 11; -1)$

Diện tích mặt chéo BDQN: $S_{BDQN} = \left|[\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BD}]\right| = \sqrt{171}$

4) Gọi V là thể tích của khối hộp ABCD.MNPQ

Ta có: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (-5; 4; -2)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AM} = -9$

$V = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AM} = 9$ (đvtt)

Bài 16: Cho x, y là 2 số thực bất kỳ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2}$$

Bài giải

Ta có: $A = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + 1}$

Trong hệ trục Oxyz đặt: $\begin{cases} \vec{u} = (x; y-2; 1) \\ \vec{v} = (-x-1; -y; 1) \end{cases}$

Vậy $\vec{u} + \vec{v} = (-1; -2; 2)$

Và $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + 1}$

$|\vec{u} + \vec{v}| = 3 \ \forall x, y \in R$

Áp dụng bất đẳng thức: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ (*)

Ta được $A = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = 3 \ \forall x, y \in R$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|\vec{u}|$ và $|\vec{v}|$ cùng phương, tức là:

$$\frac{x}{-x-1} = \frac{y-2}{-y} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{-x-1} = 1 \\ \dfrac{y-2}{-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Do đó MinA = 3 đạt được khi $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 17: Cho x, y, z là 3 số không âm, thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z}$

Bài giải

Xét véc tơ $\vec{u} = \sqrt{x+y}.\vec{i} + \sqrt{y+z}\vec{j} + \sqrt{x+z}.\vec{k}$

Và $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Ta được

- $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{x+y}.1 + \sqrt{y+z}.1 = \sqrt{x+z}.1 = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = \sqrt{x+z}$
- $|\vec{u}|^2 = (\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{y+z})^2 + (\sqrt{x+z})^2 = 2(x+y+z) = 6$ nên $|\vec{u}| = \sqrt{6}$
- $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Vì với mọi véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta luôn có bất đẳng thức: $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$

Nên $A = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} \leq \sqrt{3}.\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+y}}{1}=\frac{\sqrt{y+z}}{1}=\frac{\sqrt{x+z}}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$$

Do đó Max A $= 3\sqrt{2}$ đạt được khi $x=y=z=1$

II. Bài tập luyện tập

Bài 18: 1) Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD

a) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

b) Với M là điểm bất kỳ trong không gian.

Hãy chứng minh: $4\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

2) Cho mặt phẳng (P). Tìm điểm M' nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\left.\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'C}+\overrightarrow{M'D}\right|$ ngắn nhất

3) Gọi G_1 là trọng tâm của tam giác BCD

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

Bài 19: Cho 3 điểm A, B, C với A(1; 2; 3), B(2; 0; 1), C(0; 0; 1)

1) Chứng minh rằng A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác và tính chu vi, diện tích của tam giác ABC

2) Tìm tọa độ tâm, bán kính r của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

Bài 20: Cho 3 điểm A(2; 2; −2), B(−1; 0; 1), C(2; 4; 1). Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 21: Trong hệ trục Oxyz cho 3 điểm A, B, C với A(−3; 1; −2), B(1; 1; 1), C(−2; 2; 1).

1) Chứng minh 3 véc tơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ không đồng phẳng

2) $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ tạo nên một hình hộp có 3 cạnh OA, OB, OC. Hãy tính thể tích của hình hộp đó.

Bài 22: Hình chóp SABC có SA = a, SB = b, SC = c và $\widehat{ASB}=\varphi$, $\widehat{BSC}=\beta$, $\widehat{CSA}=\gamma$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách SG.

Bài 23: Cho điểm M(1; 2; 3) gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên ba trục Ox, Oy, Oz. Hãy tính diện tích của tam giác ABC.

Bài 24: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm A(2; −4; 6). Gọi B, C, D lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz.

1) Tính thể tích của khối tứ diện OBCD.

2) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=5\overrightarrow{MA}$. Gọi G là trọng tâm của khối tứ diện ABCD. Chứng minh 3 điểm A, G, M thẳng hàng.

3) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABDC. Chứng tỏ rằng mặt cầu này đi qua gốc tọa độ O.

Bài 25: Cho tứ diện ABCD với A(2; 1; 0), B(1; 1; 3), C(2; −1; 3), D(1; −1; 0).

1) Chứng minh rằng tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau

2) Tính góc tạo bởi 2 đường thẳng AB và CD

3) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

4) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD

Bài 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ tạo với các véc tơ $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ các góc φ, β, γ. Chứng minh rằng $\cos^2\varphi + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Bài 27: Cho tam giác ABC với A(1; −1; 2), B(2; 0; 4), C(−1; 0; 1). Tính góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC.

Bài 28: Cho A(3; 1; 0), B(−2; 4; 1). Tìm điểm M trên trục tung cách đều 2 điểm A, B

Bài 29: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 3 điểm A(1; 1; 1), B(−1; 1; 0), C(3; 1; −1). Tìm điểm M trên mặt phẳng oxz cách đều 3 điểm: A, B, C.

Bài 30a: Cho tứ diện ABCD

a) Chứng minh hệ thức: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

b) Từ hệ thức trên hãy chứng minh định lý:
"Nếu một hình tứ diện có 2 cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau, thì cặp cạnh đối diện thứ 3 cũng vuông góc với nhau".

Bài 31b: Cho 3 điểm A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1).

a) Chứng minh: A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC

c) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

d) Tính các góc của tam giác ABC.

III. Hướng dẫn giải bài tập

Bài 18.

a. Theo quy tắc hình bình hành về phép cộng véc tơ ta có:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$

$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}$

nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF})$. Vì I là trung điểm của EF nên $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$ vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

b. M là điểm bất kỳ trong không gian ta phải chứng minh:

$4\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ (1)

Theo quy tắc 3 điểm cộng véc tơ

Vế trái (1) = $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI}$

mà I là trung điểm của EF theo kết quả của câu a.

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI} = \vec{0}$

nên vế trái (1) = Vế phải (1) ⇒ ĐPCM

c. Lấy M bất kỳ nằm trong mặt phẳng (P) theo kết quả câu (b), đẳng thức (1) đúng cho nên $y = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{MI}\right| = 4MI$ mà A, B, C, D cố định nên E, F cố định. Vậy I cố định nên y ngắn nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất. Khi M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

d. G_1 là trọng tâm của tam giác BCD

Chứng minh $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ (2)

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1B}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1C}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1D}$

Mà G_1 là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

Nên (2) đúng

Bài 19.

a. Tính $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ chứng minh $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương để kết luận A, B, C là 3 đỉnh của tam giác

Tính AB = AC = 3, BC = 2 nên tam giác ABC cân đỉnh A,

D là trung điểm của BC nên AD là trung tuyến cũng là đường cao là phân giác của góc A của tam giác ABC

– Chu vi của tam giác ABC là 2P = 8 (Đơn vị độ dài)

– Tính toạ độ điểm D. Tính AD

Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}BC.AD = 2\sqrt{2}$ (đvdt)

b. Trong tam giác ABC kẻ phân giác trong của góc B cắt AD tại điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Trong tam giác ABD, BI là phân giác trong góc B. Áp dụng $\frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} = -\frac{AB}{BD}$ giải phương trình tìm được toạ độ điểm I $(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng r:

Cách 1: $r = ID = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Đơn vị độ dài)

Cách 2: Áp dụng công thức $S = p.r \Leftrightarrow r = \frac{S}{p}$

Bài 20. Tính $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải phương trình $\begin{cases} 6 - 6x_0 = 0 \\ 14 - 7y_0 = 0 \\ 3 - 6z_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 2 \end{cases}$ ta được M (1; 2; 2)

Bài 21 a.

– Tính $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$

– Tính $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}].\overrightarrow{OC} = -8 \neq 0$

Kết luận 3 véc tơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ không đồng phẳng

b. Gọi V là thể tích của khối hộp có 3 cạnh là OA, OB, OC

$V = \left|[\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}].\overrightarrow{OC}\right| = 8$ (đvtt)

Bài 22. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$

– Ta có: $(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})^2 = \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SC}^2 + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\gamma + 2bc.\cos\beta$

Vậy $SG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2bc\cos\beta + 2ac\cos\gamma}$

Bài 23. Hình chiếu vuông góc của điểm M (1,2,3)

Trên 3 trục ox, oy, oz lần lượt là A(1; 0; 0); B(0;2;0); C(0;0;3)

Tính $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{7}{2}$ (đvdt)

Bài 24.

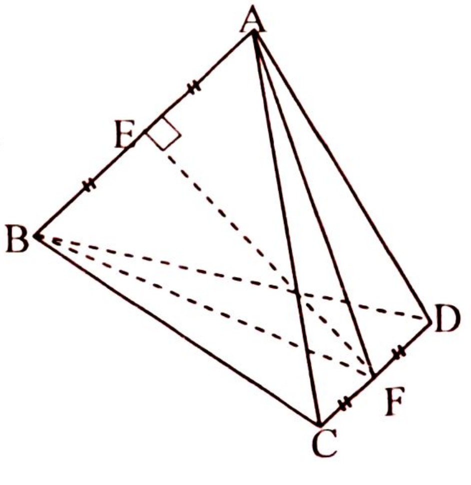
(1) B; C; D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên Ox, Oy, Oz ta được B(2;0;0), C(0;–4;0), D(0;0;6). Do OB, OC, OD vuông góc với nhau từng đôi một nên thể tích của khối tứ diện OBCD

$V_{OBCD} = \frac{1}{6}OB.OC.OD = 8$ (đvtt)

(2) Gọi M (x, y, z) tính $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}$

Giải phương trình: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MA}$

$$\begin{cases} 2 - 3x = 10 - 5x \\ -4 - 3y = -20 - 5y \\ 6 - 3z = 30 - 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -8 \\ z = 12 \end{cases}$$



Ta được M(4;–8;12)

* Chứng minh 3 điểm A, G, M thẳng hàng

Tính $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AG}$ ta được $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AG}$

Kết luận 3 điểm A, G, M thẳng hàng

(3) Gọi I (x_0, y_0, z_0) là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện ABCD

Cách 1: Ta được IA = IB = IC giải hệ PT $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \\ z_0 = 3 \end{cases}$

được I (1;–2;3). Bán kính $R = IA = \sqrt{14}$

Cách 2: PT mặt cầu đi qua A, B, C, D có dạng $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ cho mặt cầu lần lượt đi qua A, B, C, D giải hệ PT cũng tìm được x_0, y_0, z_0 và R.

* Tính $IO=\sqrt{14}=R$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp ABCD đi qua O

Bài 25.

(1) Tính $AB=CD=\sqrt{10}$; $AC=BD=\sqrt{13}$; $AD=BC=\sqrt{5}$

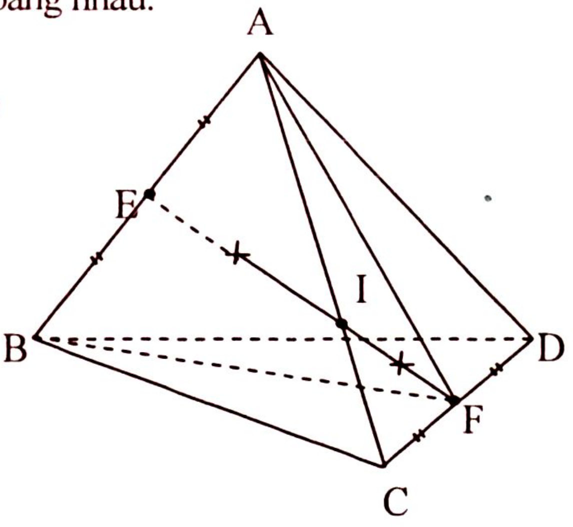
Vậy tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau.

(2) Tính $\overrightarrow{AB}=(-1;0;3)$; $\overrightarrow{CD}=(-1;0;-3)$

Gọi φ là góc giữa hai cạnh AB và CD

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})\right|=\frac{4}{5}$$

$$\varphi\approx 36^0 52'$$



(2) Theo kết quả câu (1)

Chứng minh $\Delta ACD=\Delta BCD$ nên 2 đường trung tuyến tương ứng AF = BF. Vậy ΔABF cân đỉnh F nên trung tuyến FE là đường cao

Tương tự ΔECD cân đỉnh E nên EF cũng là đường cao của tam giác ECD (chú ý tứ diện ABCD là tứ diện gần đều)

Lấy I là trung điểm EF. Do ΔIAB cân đỉnh I nên IA = IB

ΔICD cân đỉnh I nên IC = ID mà $\Delta IEA=\Delta ICD$ đều 4 đỉnh A, B, C, D. I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp ABCD. Tính toạ độ điểm $I(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2})$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là R

$$R=IA=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

(I chính là trọng tâm của tứ diện ABCD)

(3) Do EF vuông góc và cắt AB và CD nên EF là đoạn vuông góc chung của AB và CD.Khoảng cách giữa AB và CD: d(AB, CD)=EF=2

Bài 26. Gọi $\vec{a}=(x;y;z)\neq 0$

Tính $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Ta được: $\text{Cos}^2\alpha+\text{Cos}^2\beta+\text{Cos}^2\gamma=1$

Bài 27. Tính

$$\cos A=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\Rightarrow A=120^0$$

hoặc dùng định lý côsin cho tam giác ABC

Bài 28. Gọi điểm $M \in Oy, M(0; y_0; 0)$

M cách đều 2 điểm A, B khi $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$ giải PT tìm được $y_0 = \dfrac{11}{6}$. Ta được: $M(0; \dfrac{11}{6}; 0)$

Bài 29. Gọi điểm $M \in (Oxz)$. $M(x_0; 0; z_0)$

M cách đều A, B, C khi và chỉ khi $MA^2 = MB^2 = MC^2$; giải hệ tìm được

$\begin{cases} x_0 = \dfrac{5}{6} \\ z_0 = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$. Ta được điểm $M(\dfrac{5}{6}; 0; \dfrac{-7}{6})$

Bài 30a.

a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (1)

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ (2)

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ (3)

Cộng vế với vế (1); (2); (3) với nhau ta được:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad (4)$$

b. Nếu tứ diện ABCD có 2 cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau. Chẳng hạn $AB \perp CD$, $AC \perp DB$ ta phải chứng minh 2 cạnh đối còn lại là $AD \perp BC$

Từ giả thiết ta được: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ mà (4) luôn đúng nên $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ chứng tỏ $AD \perp BC$

Bài 30b.

a. Tính $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; 2; 1) \neq 0$ chứng tỏ 2 véctơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác

b. Chu vi của tam giác ABC: $2P = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

Diện tích của tam giác ABC: $S = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (đvdt)

c. Diện tích $\Delta ABC = S = \dfrac{1}{2} h_a B_c$ ha là độ dài đường cao kẻ từ A của ΔABC

Vậy $h_a = \dfrac{2S}{BC} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$ (Đơn vị độ dài)

d. Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ nên $\widehat{A} = 90^0$.

Vậy B, C nhọn nên $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$. $\widehat{B} = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

$\cos C = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. $\widehat{C} = \arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

PHẦN II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng

1. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là véc tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$. Có giá vuông góc với mặt phẳng (α), ta viết $\vec{n} \perp (\alpha)$
2. Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc tơ không cùng phương và các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng hoặc là giá của chúng nằm trên mặt phẳng (α) thì véc tơ $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

   Cặp véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ như vậy còn gọi là cặp véc tơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

   Ký hiệu véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là VTPT của mặt phẳng (α)

II. Phương trình của mặt phẳng

1. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

a) Trong không gian toạ độ 0xyz, mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (1) với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ (*) đều là phương trình của một mặt phẳng.

b. Phương trình (1) với điều kiện (*) được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

c. Nếu mặt phẳng (α) có phương trình (1) với điều kiện (*) thì một véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (A, B, C)$

2. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Có 1 VTPT $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$.

Có phương trình là:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

3. Phương trình mặt phẳng lập theo đoạn chắn

Mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm $A(a;\ 0;\ 0) \in 0x, B(0, b, 0) \in 0y, C(0, 0, c) \in 0z$ với $abc \neq 0$. Có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

4. Các trường hợp riêng

Xét mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát $Ax + By + Cz + D = 0$ (H)

Với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Khi đó:

a. (α) đi qua gốc toạ độ khi và chỉ khi $D = 0$

b. (α) // trục 0z khi và chỉ khi $C = 0, D \neq 0$

c. (α) chứa trục 0z khi và chỉ khi $C = D = 0$

d. (α) // mp (0yz) khi và chỉ khi $B = C = 0, D = 0$

e. (α) trùng với mp (0yz) khi và chỉ khi $B = C = D = 0$

Chú ý: Khi nói (α)//0z hoặc (α) chứa 0z điều này tương đương với $(\alpha) \perp$ trục 0x. (Các trường hợp khác được suy ra tương tự).

B. CÁC BÀI TOÁN VỀ LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Bài toán 1: Lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm M (x_0, y_0, z_0) và biết 1 VTPT: $\vec{n} = (A, B, C) \neq 0$

Bài 31. Cho tam giác ABC với A(3;–5;2), B(1;–2;0), C(0;–3;7). Lập PT của mặt phẳng đi qua một đỉnh của tam giác và vuông góc với cạnh đối diện.

Bài giải

a. Lập PT (P) mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với cạnh BC. Như vậy mp(P) nhận $\overrightarrow{BC} = (-1; -1; 7)$ làm véc tơ pháp tuyến và (P) đi qua điểm A có PT là $(-1).(x-3) - 1.(y-5) + 7(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 7z + 16 = 0$

b. PT mp (Q) đi qua B và (Q) $\perp$AC: có PT là $3x - 2y - 5z - 7 = 0$

c. PT mp (R) đi qua điểm C và (R) $\perp$AB có PT là: $2x - 3y + 2z - 23 = 0$

Bài 32. Viết Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với A (3; –1; –2), B (–3; 1; 2)

Bài giải

Cách 1: Gọi I là trung điểm của đoạn AB: I (0;0;0), (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Nên (P) đi qua điểm I và nhận $\vec{U} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (3; -1; -2)$ làm một VTTP (P) có phương trình:

$$3(x-0) - 1(y-0) - 2(z-0) \Leftrightarrow 3x - y - 2z = 0$$

Cách 2: Gọi M (x, y, z) nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB là mặt phẳng (P). Mọi điểm nằm trong (P) cách đều 2 điểm A và B nên $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = (x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$

$\Leftrightarrow 3x - y - 2z = 0$

Bài 33: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M (–1; 1; 2) và mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0\,(\alpha) \\ 2x - y - z - 1 = 0\ (\beta) \end{cases}$

Bài giải

Tìm véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Mặt phẳng (α) có VTPT: $\vec{n_1} = (5, -3, 2)$

Mặt phẳng (β) có VTPT: $\vec{n_2} = (2, -1, -1)$

Tính $[\vec{n_1}, \vec{n_2}] = \vec{n}$

$$[\vec{n_1}, \vec{n_2}] = \left(\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (5; 9; 1)$$

Vậy VTPT của (P) là $\vec{n} = (5; 9; 1)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M nhận $\vec{n}$ làm VTPT

$(P): 5(x+1)+9(y-1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow 5x+9y+z-6=0$

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng (p) đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và (P) nhận hai véc tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương làm cặp véc tơ chỉ phương.

Phương pháp giải:

Tính $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{n}$. Vì (P) nhận 2 véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ làm cặp VT chỉ phương nên (P) nhận $\vec{n}$ làm một véc tơ pháp tuyến, lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và nhận $\vec{n}$ làm VTPT

Loại 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng

Phương pháp giải:

- Nếu đề bài cho 3 điểm A, B, C thì phải chứng minh A, B, C không thẳng hàng

- Trong 3 điểm A, B, C lập nên hai véc tơ, chẳng hạn $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Tính $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\vec{n}$

- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hoặc A, hoặc B, hoặc C và nhận $\vec{n}$ làm VTPT

Bài 34. Cho 3 điểm A, B, C với A(2;–3;1), B(–2;0;5), C(3;2;0). Lập phương trình mặt phẳng (ABC)

Bài giải

Tính $\overrightarrow{AB}=(-4;3;4), \overrightarrow{AC}=(1;5;-1)$

Tính $\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}3 & 4\\5 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & -4\\-1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4 & 4\\1 & 5\end{vmatrix}\right)=(-23;0;-23)\neq\vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên 3 điểm A, B, C không thẳng hàng

Chọn $\vec{n}=-\dfrac{1}{23}[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(1;0;1)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A nhận $\vec{n}$ làm VTPT

Có phương trình $1(x-2)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow x+z-3=0$

Bài 35. Cho điểm M (2;4;6)

1. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên các trục ox, 0y, 0z viết phương trình mặt phẳng (DEF)
2. Gọi A, B, C là các điểm đối xứng của M lần lượt qua các trục 0x, 0y, 0z. Viết phương trình mặt phẳng (ABC)
3. Gọi G, H, K lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các mặt phẳng toạ độ (x0y), (0yz), (0zx). Viết phương trình mặt phẳng (GHK)

Bài giải

1. D, E, F là hình chiếu của M lần lượt trên 0x, 0y, 0z D(2;0;0); E(0;4;0); F(0;0;6)

   Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được mặt phẳng (DEF) có phương trình: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$

2. A là điểm đối xứng của M đi qua trục 0x. Như vậy D là trung điểm của đoạn AM

   Ta được: $\begin{cases} x_A = 2x_D - x_M = 4-2 = 2 \\ y_A = 2y_D - y_M = 0-4 = -4 \\ z_A = 2z_D - z_M = 0-6 = -6 \end{cases}$ ta được A(2;–4;–6)

   Tương tự B là điểm đối xứng của M qua 0y B(–2;4;–6)

   Tương tự C là điểm đối xứng của M qua 0z C(–2; –4; 6)

   Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4;8;0)$; $AC = (-4;0;12)$

   Tính $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = (96;48;32) \neq \vec{0}$

   Vậy A, B, C không thẳng hàng. Chọn $\vec{n} = \frac{1}{16}[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = (6;3;2)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC), (ABC) đi qua điểm A phương trình mp (ABC) có dạng:

   $$6(x-2)+3(y+4)+2(z+6)=0 \Leftrightarrow 6x+3y+2z+12=0$$

3. Gọi M_1 là hình chiếu của M trên mặt phẳng (x0y), $M_1(2;4;0)$

   G là điểm đối xứng của M qua mp (x0y) thì M_1 là trung điểm của GM ta được: $\begin{cases} x_G = 2x_{M_1} - x_M = 2 \\ y_G = 2y_{M_1} - y_M = 4 \\ z_G = 2z_{M_1} - z_M = -6 \end{cases}$ ta được G(2; 4; –6)

   Tương tự ta có: H(-2;4;6); K(2;-4;6) $\Rightarrow \overrightarrow{GH} = (-4;0;12)$; $\overrightarrow{GK} = (0;-8;12)$

   Tính $[\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GK}] = (96;48;32) \neq \vec{0}$ nên 3 điểm G, H, K không thẳng hàng.

   Chọn $\vec{n_2} = \frac{1}{16}\left[\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GK}\right] = (6;3;2)$

   Mặt phẳng (GHK) đi qua điểm G và nhận 2 véc tơ $\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GK}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n_2}$ làm một VTPT

   Mặt phẳng (GHK) có PT: $6x+3y+2z-12=0$

Bài 36. Cho điểm G (1; 2; 3) mặt phẳng (α) qua điểm G cắt các trục toạ độ 0x, 0y, 0z lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhận điểm G làm trọng tâm. Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

Bài giải

Gọi điểm A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c). Do G là trọng tâm của tam giác ABC

nên ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3} = 1 \\ \dfrac{b}{3} = 2 \\ \dfrac{c}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$

Như vậy: A(3;0;0), B(0;6;0), C(0,0,9)

Viết phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn ta được mặt phẳng (ABC) có phương trình: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$

Loại II.

(1) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm M, N và (P) vuông góc với mặt phẳng Q

Phương pháp giải:

- Gọi VTPT của (Q) là $\vec{n_1}$
- Lập VT $\overrightarrow{MN}$ hoặc $\overrightarrow{NM}$ chọn VT chỉ phương của MN là $\vec{a}$
- Tính $[\vec{a}, \vec{n_1}] = \vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của (P)
- Lập mặt phẳng (P) đi qua điểm M (hoặc điểm N) và nhận $\vec{n}$ làm VTPT

Bài 37. Cho hai điểm M(1;0;0) và N(0;1;–1) và mặt phẳng (Q): x + y – z = 0

Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm M, N và (P) vuông góc với (Q)

Bài giải

- Mặt phẳng (Q) có VTPT là $\vec{n_1} = (1;1;-1)$
- Lập $\overrightarrow{MN} = (-1;1;-1)$ chọn VTCP của MN là $\vec{a} = (1;-1;1)$
- Tính $[\vec{a}, \vec{n_1}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0;2;2)$

Chọn $\vec{n} = \dfrac{1}{2}[\vec{a}, \vec{n_1}] = (0;1;1)$

- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và nhận $\vec{n}$ làm VTPT: (P) có phương trình:

$$0(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow y + z = 0$$

(2) Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và (P) vuông góc với mặt phẳng (Q)

Phương pháp giải:

- Chọn 1 VTCP của đường thẳng Δ là véc tơ $\vec{a}$
- Chọn 1 VTPT của (Q) là $\vec{n_1}$
- Tính $[\vec{a}, \vec{n_1}] = \vec{n}$
- Lấy điểm M nằm trên đường thẳng Δ
- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và nhận $\vec{n}$ làm VTPT

Bài 38. Cho đường thẳng Δ $\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$ $(t \in R)$ và mặt phẳng (Q): $x + y - z - 1 = 0$

lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và (P) ⊥(Q)

Bài giải

– Đường thẳng Δ đi qua điểm M(0;0;1) và Δ có một VTCP là $\vec{a} = (-2; 1; 1)$

– Mặt phẳng (Q) có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -1)$

– Tính $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{n_1}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2; -1; -3)$

Chọn $[\vec{a}, \vec{n_1}] = (2;1;3)$

– Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và (P) ⊥(Q) thì mặt phẳng (P) đi qua điểm M và nhận $\vec{n}$ làm VTPT

(P) có PT: $2(x - 0) + 1(y - 0) + 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z - 3 = 0$

(3) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua một điểm M (x_0, y_0, z_0) và (P) chứa một đường thẳng Δ

Phương pháp giải:

- Chọn một VTCP của Δ là $\vec{a}$
- Trên Δ lấy một điểm M. Lập VT $\overrightarrow{AM}$ chọn VTCP của AM là véc tơ $\vec{b}$
- Tính $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \vec{n}$
- Mặt phẳng (P) chứa Δ thì (P) đi qua điểm M và nhận $\vec{n}$ làm VTPT.

Bài 39: Cho đường thẳng $\Delta \begin{cases} x = -3t+6t \\ y = 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$ $(t \in R)$ và điểm A (1; 3; 2). Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và chứa đường thẳng Δ

Bài giải

– Một VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{a} = (6; 3; -4)$

– Lấy điểm M (–3; 0; 2) nằm trên đường thẳng Δ.

Lập véc tơ $\overrightarrow{AM} = (-4;-3;0)$. Chọn VTCP của AM là $\vec{b} = (4;3;0)$

– Tính $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right) = (12; -16; 6)$

Chọn $\vec{n} = \frac{1}{2}[\vec{a}, \vec{b}] = (6; -8; 3)$ làm VTPT của mặt phẳng (P) đi qua M và chứa Δ có phương trình:

$6(x + 3) - 8(y - 0) + 3(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8y + 3z + 12 = 0$

(4) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(x_0, y_0, z_0) đồng thời (P) vuông góc với 2 mặt phẳng (Q) và (R)

Phương pháp giải:

– Chọn một véc tơ pháp tuyến của (Q) và của (R) lần lượt là $\vec{n_1}$; $\vec{n_2}$

– Tính $[\vec{n_1}, \vec{n_2}] = \vec{n}$

– Lập mặt phẳng (P) đi qua M và nhận $\vec{n}$ làm VTPT

Bài 40. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(3;–1;–5) đồng thời vuông góc với 2 mặt phẳng:

(Q): $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ (R): $5x - 4y + 3z + 1 = 0$

Bài giải

– Mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_1} = (3; -2; 2)$

Mặt phẳng (R) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_2} = (5; -4; 3)$

– Tính $[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \right) = (2; 1; -2) = \vec{n}$

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M. (P) ⊥ (Q), (P) ⊥ (R) tức là (P) đi qua M và nhận $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n}$ làm VTPT.

(P) có PT là: $2(x - 3) + 1(y - 1) - 2(z + 5) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z - 15 = 0$

Loại III

(1) Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa một trong hai đường thẳng d_1 chéo d_2 và (P) song song với đường thẳng kia

Phương pháp giải:

* Nếu cho 2 đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau thì không phải chứng minh d_1 chéo d_2; nếu không thì phải chứng minh d_1 chéo d_2

* Nếu lập mặt phẳng (P) chứa d_1, $P//d_2$ thì thực hành theo các bước sau:

– Chọn một VTCP của d_1 là $\vec{a}$, 1 VTCP của d_2 là $\vec{b}$

– Tính $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{n}$

– Lấy 1 điểm $M\in d_1$

– Lập mặt phẳng (P) đi qua điểm M và nhận $\vec{n}$ làm VTPT

Bài 41. Cho 2 đường thẳng $d_1\begin{cases}x=t\\y=1+2t\ \ (t\in R)\\z=6+3t\end{cases}$ và $d_2\begin{cases}x=1+t'\\y=-2+t'\ \ (t'\in R)\\z=3-t'\end{cases}$

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) $//d_2$

Bài giải

* Chứng minh đường thẳng d_1 chéo d_2

Đường thẳng d_1 đi qua điểm M(0;1;6) và có 1 VTCP $\vec{a}=(1;2;3)$

Đường thẳng d_2 đi qua điểm N (1;–2;3) và có 1 VTCP $\vec{b}=(1;-1;1)$

Tính $[\vec{a},\vec{b}]=(-5;4;-1)$

Tính $\overrightarrow{MN}=(1;-3;-3)$

Tính $[\vec{a},\vec{b}]\overrightarrow{MN}=-9\neq 0$

Vậy 3 véc tơ $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng nên d_1 chéo d_2

* Mặt phẳng (P) chứa d_1, $(P)//d_2$ nên mặt phẳng (P) đi qua điểm M và nhận 2 véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ làm cặp VTCP và nhận $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=(-5;4;-1)$ làm VTPT mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$-5(x-0)+4(y-1)-1(z-6)=0\Leftrightarrow 5x-4y+z-2=0$$

(2) Cho 2 đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1, Q chứa d_2 và (P)//(Q)

Phương pháp giải:

– Trên đường thẳng d_1 lấy điểm M và 1 VTCP $\vec{a}$

Trên đường thẳng d_2 lấy điểm N và 1 VTCP $\vec{b}$

– Tính $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{n}=(A_1,B_1,C_1)\neq\vec{0}$

– Lập mặt phẳng (R) nhận $\vec{n}$ làm VTPT

$$(R):\ A_1x+B_1y+C_1z+D=0$$

Mặt phẳng (R) này đồng thời song song với d_1 và d_2

– Cho (R) đi qua điểm M. Tìm được D ta được mặt phẳng (P) chứa d_1 cho (R) đi qua điểm N tìm được D ta được mặt phẳng (Q) chứa d_2 và (P)//(Q)

Bài 42. Cho 2 đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau

$$d_1\begin{cases}x = 2t_1 + 3\\ y = -2t_1 - 2\ (t_1 \in R)\\ z = t_1\end{cases} \text{ và } d_2\begin{cases}x = 8t_2 - 23\\ y = 4t_2 - 10\ (t_2 \in R)\\ z = t_2\end{cases}$$

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (Q) chứa d_2 và (P) //(Q)

Bài giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm M(3;–2;0) và có VTCP là $\vec{a} = (2;-2;1)$

Đường thẳng d_2 đi qua điểm N(–23; –10;0) và có VTCP là $\vec{b} = (8;4;1)$

Tính $[\vec{a},\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 8\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -2\\ 8 & 4\end{vmatrix}\right) = (-6;\ 6;24)$

Chọn $\vec{n} = -\dfrac{1}{6}[\vec{a},\vec{b}] = (1;-1;-4)$ nên nhận $\vec{n} = (1;-1;-4)$ làm một VTPT

Có phương trình (R): $x - y - 4z + D = 0$ mặt phẳng (R) như vậy song song với d_1 và d_2

– Cho mặt phẳng (R) đi qua điểm M ta được mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 ứng với D= –5. Vậy mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $x - y - 4z - 5 = 0$

– Cho mặt phẳng (R) đi qua điểm N ta được D = 13 thay D vào (R) ta được mặt phẳng (Q) có phương trình $x - y - 4z + 13 = 0$

(Q) chứa d_2 và (P) song song với (Q)

$$(P): x - y - 4z - 5 = 0;\ \ (Q): x - y - 4z + 13 = 0$$

Loại IV

Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau và d_1 vuông góc với d_2. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) vuông góc với d_2

Phương pháp giải:

Vì d_1 chéo d_2 và d_1 vuông góc d_2 nên mặt phẳng (P) chỉ cần đi qua 1 điểm $M \in d_1$ và (P) nhận VTCP của d_2 làm VTPT

Bài 43. Cho 2 đường thẳng $d_1\begin{cases}x = t + 1\\ y = -t - 1 (t \in R)\\ z = t\end{cases}$ và $d_2\begin{cases}x = 2 + at_1\\ y = -1 + 2t_1\ (t_1 \in R)\\ z = 3 - 3t_1\end{cases}$

a. Tìm a để d_1 vuông góc với d_2 và d_1 chéo d_2

b. Với kết quả câu a. Hãy lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) vuông góc d_2

Bài giải

a. Véc tơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{U}=(1;1;1)$

Véc tơ chỉ phương của d_2 là $\overrightarrow{V}=(a;2;-3)$

Điều kiện cần đủ để d_1 vuông góc với d_2 là $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}=0 \Leftrightarrow a+2-3=0 \Leftrightarrow a=1$

Khi a = 1. $\overrightarrow{V}=(1;2;-3)$

Ta có: $[\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}]=(-5;4;1)$

Trên d_1 lấy điểm M(1;−1;0)

Trên d_2 lấy điểm N(2;−1;3)

Lập $\overrightarrow{MN}=(1;0;3)$

Ta có $[\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}].\overrightarrow{MN}=-2\neq 0$

Vậy 3 véc tơ $\overrightarrow{U},\overrightarrow{V},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng nên d_1 chéo d_2

Vậy với a = 1 thì d_1 chéo d_2 và $d_1 \perp d_2$

b. Do d_1 vuông góc với d_2 nên (P) chứa d_1 và (P) $\perp d_2$ chỉ cần (P) đi qua điểm M và (P) nhận $\overrightarrow{V}$ làm véc tơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (P) có phương trình là

$1(x-1)+2(y+1)-3(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y-3z+1=0$

Bài tập tự luyện phần thứ hai

Bài 44. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn MN với M(1; 3; 2) và N (−3; 5; 6)

Bài 45. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm A(−3;5;7) và vuông góc với BC với B(0;−1;1); C(3;1;−2)

Bài 46. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và (P) song song với mặt phẳng (Q): $4x+3y-2z+1=0$

Bài 47. Lập phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=109$ tại các điểm là giao điểm của đường thẳng

$$d\begin{cases}x=3t-5\\ y=5t-1\,(t\in R)\\ z=9-4t\end{cases}$$

với mặt cầu (S)

Bài 48. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(2;3;−1) và (P) chứa trục 0z

Bài 49. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(2;1;–1) và qua giao tuyến của 2 mặt phẳng (P_1): $x - y + z - 4 = 0$ và (P_2): $3x - y + z - 1 = 0$

Bài 50. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của hai mặt phẳng: (P_1) $x + y - z - 3 = 0$, (P_2): $y + 2z - 4 = 0$ đồng thời (P) vuông góc với mặ phẳng (Q): $x + y + z - 2 = 0$

Bài 51: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng $3x - y + z - 2 = 0$ và $x + 4y - 5 = 0$ đồng thời (P) song song với mặ phẳng (Q): $2x - z + 7 = 0$

Bài 52: Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và (P) vuông góc với mặt phẳng (x0y)

Bài 53. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1): $2x - y + z + 1 = 0$ và (P_2): $x + 2y - z - 3 = 0$. đồng thời (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$x - y + z + 10 = 0$$

Bài 54. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q): $3x + 2y - z - 5 = 0$

Bài 55. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M(1;0;0) và N(0;1;–1) và mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q): $x + y - z = 0$

Bài 56. Lập phương trình mặt phẳng (P) qua 2 điểm M(1;–1;5), N(0;0;1) và (P) song song với trục 0y.

Bài 57. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A(2;–1;1) và (P) vuông góc với 2 mặt phẳng $2x - z + 1 = 0$ và $y = 0$

Bài 58. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(3;–1;–5) và (P) vuông góc với 2 mặt phẳng: $3x - 2y + 2z - 15 = 0$; $5x - 4y + 3z + 1 = 0$

Bài 59. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng: $y + 2z - 4 = 0$ và $x + y - z - 3 = 0$, đồng thời (P) vuông góc với mặt phẳng: $x + y + z - 2 = 0$

Bài 60. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng: $3x - y + z - 2 = 0$; $x + 4y - 5 = 0$, đồng thời (P) song song với mặt phẳng (Q) $2x - z + 7 = 0$

Bài 61. Cho 2 đường thẳng $d_1 \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \quad (t \in R) \\ y = 1 \end{cases}$ $d_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t' \quad (t' \in R) \\ y = 3 - t' \end{cases}$

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1, (P) song song với d_2

Bài 62. Cho 2 đường thẳng d_1, d_2

$$d_1\begin{cases}x = 2 + 2t\\ y = -1 + 3t \quad (t \in R)\\ y = -4 + 3t\end{cases} \quad d_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{2}$$

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1, mặt phẳng (Q) chứa d_2 sao cho mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

Bài 63. Mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm E(4;–1;1) và F(3;1;–1) và (P) song song với trục 0x. Lập phương trình mặt phẳng (P).

Bài 64. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A(1;2;3) và mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q): $x - 4y + z + 12 = 0$.

Bài 65. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm A(1;4;–3) và trục 0y.

Bài 66. Cho 3 điểm A(2;1;–1), B(–1;0;4), C(0;–2;–1). Lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với BC.

Bài 67. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(3;–1;–5) và (P) vuông góc với 2 mặt phẳng: $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $3x - 2y + 2z + 1 = 0$

Bài 68. Cho tứ diện ABCD với các đỉnh có toạ độ là: A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6)

a) Hãy viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểnh D và (α) song song với mặt phẳng (ABC).

Bài 69. Cho điểm A(2;3;4). Hãy viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua các hình chiếu của điểm A trên 3 trục toạ độ.

Bài 70. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M(1;2;3) và (α) cắt 3 tia 0x, 0y, 0z lần lượt tại A, B, C. Sao cho tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

Bài 71. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M(1;2;4) sao cho (α) cắt các trục toạ độ lần lượt tại A, B, C thoả mãn điều kiện $OA = OB = OC \neq 0$

Bài 72. Cho tứ diện ABCD với A(3;5;–1), B(5;7;3), C(9;–1;5), D(5;3;–3). Viết phương trình mặt phẳng cách đều 4 đỉnh của khối tứ diện ABCD.

Hướng dẫn giải bài tập phần luyện

(Từ bài 44 đến 72)

Bài 44. Đáp số: Mặt phẳng trung trực của MN có dạng: $2x - y + 2z - 2 = 0$

Bài 45. Mặt phẳng qua A vuông góc BC có phương trình là:

$$3x + 2y - 3z + 20 = 0$$

Bài 46. Được 2 mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình là: $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ và $4x + 3y - 12z - 26 = 0$

Bài 47. Hướng dẫn:

– Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt cầu (S) dẫn đến giải phương trình: $t^2 - 3t + 2 = 0$ được 2 giao điểm A(–2;4;5), B(1;9;1)

– Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S), mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IA}$ làm VTPT: $3x + 10z - 62 = 0$

– PT mặt phẳng (Q) qua B tiếp xúc mặt cần (S): $3x + 8y + 6z - 81 = 0$

Bài 48. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa trục 0z có phương trình là:

$$3x - 2y = 0$$

Bài 49. Phương trình mặt phẳng (P) phải lập: $15x - 7y + 7z - 16 = 0$

Bài 50. Mặt phẳng (P) phảm lập có phương trình: $3x + 2y - 5z - 5 = 0$

Bài 51. Tìm VTCP của giao tuyến 2 mặt phẳng là $\vec{u} = (-4; 1; 13)$

– VTPT của Mặt phẳng (Q): $2x - z + 7 = 0$ là $\vec{n} = (2; 0; -1)$

Do $\left[\vec{u}, \vec{n}\right] \neq \vec{0}$ nên đường thẳng giao tuyến cắt mặt phẳng (Q)

Do đó không tồn tại mặt phẳng (P) phải lập.

Bài 52. Phương trình mặt phẳng (P) phải lập có dạng: $3x - 2y - 7 = 0$

Bài 53. Phương trình mặt phẳng phải lập (P): $4x + 3y - z - 5 = 0$

Bài 54. Mặt phẳng (P): $x - 8y - 13z + 9 = 0$ là phương trình phải lập

Bài 55. Mặt phẳng (P) có phương trình $y + z = 0$

Bài 56. Phương trình mặt phẳng (P) $4x - z + 1 = 0$

Bài 57. Phương trình mặt phẳng (P): $x - 2z - 4 = 0$

Bài 58. Phương trình mặt phẳng có dạng: $2x + y - 2z - 15 = 0$

Bài 59. (P): $3x + 2y - 5z - 5 = 0$ là mặt phẳng lập

Bài 60. Tìm 1 véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng là : $\vec{u} = (-4; 1; 13)$, VTPT của (Q) là $\vec{n_1} = (2; 0; -1)$.

Tính $[\vec{u}, \vec{n_1}] = (-1; 22; -2) = \vec{n}$; Δ đi qua điểm M(5;0;–13)

Mặt phẳng (P) phải lập qua M và nhận $\vec{n}$ làm VTPT
có PT là: $x - 22y + 13z + 21 = 0$

Bài 61. Phương trình mặt phẳng (P) phải lập: $x - 2y - 2z - 2 = 0$

Bài 62. (P): $18x - y - 11z - 41 = 0$
(Q): $18x - y - 11z + 53 = 0$

Bài 63. Mặt phẳng (P): $y + z = 0$ là mặt phẳng phải lập

Bài 64. Mặt phẳng phải lập có phương trình: $x - 4y + z + 4 = 0$

Bài 65. Đáp số: $3x + z = 0$

Bài 66. Mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có phương trình là:

$$x - 2y - 5z - 5 = 0$$

Bài 67. (P): $2x + y - 2z - 15 = 0$

Bài 68. a. Mặt phẳng (ABC) có cặp VTCP là $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; -1; 1)$.

Tính $[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}] = (4; 4; 4)$. Chọn $\vec{n} = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$ làm 1 VTPT của mặt phẳng (ABC)

Ta được mặt phẳng (ABC): $x + y + z - 9 = 0$

b. Mặt phẳng (α) đi qua D và (α)//(ABC) nên mặt phẳng (ABC) có 1 VTPT là $\vec{n} = (1; 1; 1)$ vậy mặt phẳng (α) có phương trình là: $x + y + z - 10 = 0$

Bài 69. Hình chiếu của điểm A(2;3;4) lên các trục 0x, 0y, 0z lần lượt là B(2;0;0), C(0;3;0), D(0;0;4) mặt phẳng (BCD) qua các điểm B, C, D có phương trình. Theo đoạn chắn: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 6x + 4y + 3z - 12 = 0$

Bài 70. Gọi giao điểm của (α) với tia 0x, 0y, 0z lần lượt là A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c) với a, b, c dương. Mặt phẳng (ABC) có phương trình theo đoạn chắn là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

(α) đi qua điểm M(1;2;3) nên ta được đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ (1) đúng

Vì OA⊥OB⊥OC nên thể tích của khối tứ diện OABC:

$V = \frac{1}{3}$ dt ΔOAB x OC $= \frac{1}{6}abc$. Với a, b, c > 0

Áp dụng bất đẳng thức cô si cho a, b, c > 0 và do (1) đúng ta được:

$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}$ (2)

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3; b = 6; c = 9$

Do 2 vế của (2) dương nên (2) $\Leftrightarrow 1 \geq \frac{27x6}{abc} \Leftrightarrow \frac{abc}{6} \geq 27$ tức $V \geq 27$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$

Ta được Min $V = 27$ đạt được khi a = 3; b = 6; c = 9

Do đó phương trình mặt phẳng (α) thoả mãn yêu cầu bài toán có dạng:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$$

Bài 71. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M(1;2;4) và có 1 véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ (α) có phương trình là:

$a(x - 1) + b(y - 2) + c(z - 4) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = a + 2b + 4c$

Với $a + 2b + 4c \neq 0$ (theo giả thiết)

Gọi điểm A là giao điểm của mp (α) với trục ox: $A(\frac{a+2b+4c}{0};0;0)$

$B=(\alpha)\cap 0y : B(\frac{a+2b+4c}{b};0)$

$C=(\alpha)\cap 0z : C\ (0;0;\frac{a+2b+4c}{c})$

Để $OA=OB=OC$

Tương đương với $OA^2=OB^2=OC^2$

$\Leftrightarrow (\frac{a+2b+4c}{a})^2=(\frac{a+2b+4c}{b})^2=(\frac{a+2b+4c}{c})^2$

$\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2$ (1)

Sẽ xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu a, b, c cùng dấu thì $a=b=c\neq 0$

Ta được mặt phẳng (α_1): $x+y+z-7=0$

Trường hợp 2: a, b cùng dấu và khác dấu với c thì từ (1) được $a=b=-c\neq 0$ ta được mặt phẳng (α_2): $x+y-z+1=0$

Trường hợp 3: a, c cùng dấu và khác dấu với b thì từ (1) được $a=c=-b\neq 0$

Mặt phẳng α có dạng (α_3): $x-y+z-3=0$

Trường hợp 4: b, c cùng dấu và khác dấu với a từ (1) ta được $-a=b=c\neq 0$

Phương trình (α) có dạng (α_4): $-x+y+z-5=0$

Bài 72. Một mặt phẳng muốn cách đều 2 điểm M, N thì hoặc nó đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN hoặc nó song song với đường thẳng MN

Vì vậy để mặt phẳng (α) cách đều 4 đỉnh của khối tứ diện ABCD thì có 2 trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của 3 cạnh cùng xuất phát từ 1 đỉnh, chẳng hạn (α) đi qua trung điểm A_1, B_1, C_1 của AB, AC, AD chỉ việc lập mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A_1, B_1, C_1. Trường hợp 1 có 4 mặt phẳng như vậy.

Trường hợp 2: Mặt phẳng (α) đi qua 4 điểm A_1 là trung điểm AB, B_1 là trung điểm BC, C_1 trung điểm CD, D_1 là trung điểm AD thì khoảng cách từ 4 đỉnh A, B, C, D đến (α) bằng nhau. Trường hợp 2 có 3 mặt phẳng như vậy với cách làm đó ta được 7 mặt phẳng (α) có phương trình là:

$x-z-6=0$; $x+y-10=0$; $x+2y-z-8=0$;
$2x+y-z-14=0$; $x-y-z-2=0$; $2x+y+z-16=0$;
$5x+y-2z-28=0$

PHẦN III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ: gọi véc tơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$. Có giá nằm trên đường thẳng Δ hoặc song song với đường thẳng Δ là véc tơ chỉ phương của Δ. Nếu $\vec{a}$ là véc tơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là véc tơ chỉ phương của Δ. Ký hiệu véc tơ chỉ phương là VTCP

2. Phương trình tham số của đường thẳng Δ

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$

có dạng: $\Delta \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (t \in R) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$

Bài 73. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm M(1;2;3) và N(2;1;4)

Bài giải

Lập $\overrightarrow{MN} = (1; -1; 1)$ chọn $\overrightarrow{MN}$ là 1 VTCP của đường thẳng Δ đi qua M, N. Có phương trình tham số (Cho Δ đi qua M hoặc N)

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in R) \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Bài 74. Cho đường thẳng d dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \quad (t \in R) \\ z = 3 + t \end{cases}$

a. Chọn một VTCP của d.

b. Lấy 2 điểm A, B bất kỳ trên d.

c. Điểm M(1;2;3) có nằm trên đường thẳng d hay không?

Bài giải

a. Một VTCP của d: toạ độ của nó là các hệ số của t trong hệ phương trình x, y, z

1 VTCP của d là $\vec{u} = (-1; 2; 1)$

b. Muốn tìm điểm thuộc đường thẳng d. Trong hệ phương trình x, y, z của d. Tuỳ ý cho t một giá trị $t \in R$ ta tìm được x, y, z là toạ độ của điểm thuộc d. Trong hệ phương trình của đường thẳng d cho t = 0 được điểm A(1;0;3) thuộc d, cho t = 1, được điểm B(0;2;4) thuộc d

c. Muốn kiểm tra điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ có thuộc đường thẳng d hay không ta làm như sau:

Trong hệ phương trình của d thay $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$

Nếu:
Trường hợp 1: hệ có một nghiệm t duy nhất là M thuộc d
Trường hợp 2: Hệ vô nghiệm không tìm được t thì M không thuộc d
Trường hợp 3: Hệ có vô số nghiệm t thì M là điểm cố định mà d luôn đi qua.

Chẳng hạn điểm M(1;2;3) có thuộc đường thẳng d hay không? Trong hệ phương trình $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ hay $x = 1; y = -2; z = 3$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 1 - t = 1 \\ 2t = 2 \\ 3t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ Hệ vô nghiệm

Vậy điểm M không thuộc d hay đường thẳng d không đi qua điểm M

Bài 75. Cho phương trình d_m: $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = 2 + (m - 1)t \\ z = 3 + m(m - 1)t \end{cases}$ Với $t \in R$, m là tham số

a. Tìm điều kiện của tham số m để d_m là phương trình của đường thẳng
b. Tìm điểm cố định mà d_m luôn đi qua

Bài giải

a. Để lập phương trình đường thẳng dưới dạng tham số thì cần 2 điều kiện: đường thẳng phải đi qua 1 điểm M và có 1 VTCP là $\vec{a} \neq \vec{0}$. Vậy để xét xem phương trình d_m có phải là phương trình đường thẳng không ta tìm tham số m để VTCP: $\vec{a} \neq \vec{0}$

Giả sử d_m là phương trình của đường thẳng thì d_m có 1 VTCP là

$\vec{a} = ((m; m - 1, m(m - 1)) = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 0 \\ m(m - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ [m=0 \\ [m=1 \end{cases}$

Hệ Vô nghiệm

Vậy không có giá trị nào của m để $\vec{a} = \vec{0}$. Do đó với mọi giá trị của m, dm luôn là phương trình đường thẳng.

b. Gọi $A(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cố định mà d_m luôn luôn đi qua dù m nhận bất kỳ giá trị nào. Khi đó hệ phương trình: $\begin{cases} mt = x_0 - 1 \\ (m - 1)t = y_0 - 2 \\ m(m - 1)t = z_0 - 3 \end{cases}$ nghiệm đúng với mọi giá trị của m khi và chỉ khi chọn t = 0.

Hệ phương trình đúng với mọi giá trị của m khi $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$

Vậy với mọi m đường thẳng d_m luôn đi qua điểm A(1;2;3) cố định

(3) Phương trình chính tắc của đường thẳng d

Đường thẳng d đi qua điểm (x_0, y_0, z_0) và có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $\begin{cases} a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \\ a_3 \neq 0 \end{cases}$ thì phương trình chính tắc của d là: $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$

Bài 76. Cho mặt phẳng (P): $x - y + z + 1 = 0$

Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(1;1;1) và vuông góc với mặt phẳng (P) dưới dạng chính tắc

Bài giải

Ta có VTPT của (P) là $\vec{n} = (1; -1; 1)$. Vì d vuông góc với mặt phẳng (P) nên chọn 1 VTCP của d là $\vec{n} = (1; -1; 1)$, d đi qua điểm M có phương trình chính tắc $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$

Chú ý:

+ Có thể coi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

(P_1) cắt (P_2) theo giao tuyến d người ta gọi là giao tuyến d là phương trình tổng quát của đường thẳng d.

+ Mặt phẳng (P1) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \neq \vec{0}$

+ Mặt phẳng (P2) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2) \neq \vec{0}$

Tính $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$

Do $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_1}$ và $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_2}$ nên $\vec{u}$ là VTCP của đường thẳng d:

Sau đây là một số ví dụ về chuyển dạng của phương trình đường thẳng

a. Cho phương trình tham số của đường thẳng d hãy lập phương trình chính tắc của đường thẳng d

Cách 1: Từ phương trình tham số của d ta được $\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{a_1} \\ t = \dfrac{y - y_0}{a_2} \\ t = \dfrac{z - z_0}{a_3} \end{cases}$ với $\begin{cases} a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \\ a_3 \neq 0 \end{cases}$

Ta được phương trình chính tắc của d có dạng: $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$

Cách 2: Trên d lấy điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và 1 VTCP là $\vec{u}=(a_1;a_2;a_3)$ với $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ ta lập được phương trình chính tắc của d

Cách 3: Trên d lấy 2 điểm M, N lập VT $\overline{MN}$ hoặc $\overline{NM}$ để chọn 1 VTCP của d. Từ đó lập phương trình chính tắc của đường thẳng d.

Chú ý: Để lập được phương trình chính tắc của d phải có điều kiện

$$\begin{cases} a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \\ a_3 \neq 0 \end{cases}$$

Bài 77: Cho phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \quad (t \in R). \\ z=-3+t \end{cases}$

Hãy lập phương trình chính tắc của d

Bài giải

Cách 1: Từ phương trình tham số của đường thẳng d ta được $\begin{cases} t=1-x=\frac{x-1}{-1} \\ t=\frac{y-2}{1} \\ t=\frac{z+3}{1} \end{cases}$

ta được phương trình chính tắc của đường thẳng d $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$

Cách 2: Trên đường thẳng d ta lấy điểm M(1;2;–3) và chọn 1 VTCP của d là $\vec{a}=(-1;1;1)$ nên phương trình chính tắc của d: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$

Cách 3: Trên d lấy 2 điểm M(1;2;3) và N(0;3;–2)

Lập VT $\overline{MN}$, ta cũng được phương trình chính tắc của d.

(b) Cho phương trình chính tắc của d: $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$ với $a_1;a_2;a_3 \neq 0$

Hãy lập phương trình tham số của d.

Cách 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ nằm trên đường thẳng d và 1 VTCP của đường thẳng d là $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ta được phương trình tham số của d:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \quad (t \in R) \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$$

Cách 2: Từ phương trình chính tắc của d ta được:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{a_1} \\ t = \dfrac{y - y_0}{a_2} \\ t = \dfrac{z - z_0}{a_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \ (t \in R) \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$$

Bài 78. Cho phương trình chính tắc của đường thẳng d: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-2}$.

Hãy lập phương trình tham số của d.

Bài giải

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;1;-1)$ và có VTCP: $\vec{a} = (2; -3; -2)$.

Vậy phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \quad (t \in R) \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

Cách 2: ta được $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} = t \\ \dfrac{y-1}{-3} = t \\ \dfrac{z+1}{-2} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \quad (t \in R) \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

Chú ý: Cho đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng

(P_1): $x - 2y - 3z - 4 = 0$ (1)

(P_2): $3x + 2y - 5z - 4 = 0$ (2)

Hãy lập PT tham số phương trình chính tắc của đường thẳng d

Cách 1: Trong hệ (1), (2) đặt $z = 2t$ thay vào hệ 1, 2 giải hệ tìm x, y theo t ta được phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - t \quad (t \in R) \\ z = 2t \end{cases}$

Cách 2: Tìm 2 điểm A, B nằm trên đường thẳng d. Trong hệ 1, 2 cho z = giải hệ ẩn x, y được điểm A(2;–1;0) ∈d

Tương tự cho y = 0 giải hệ tìm x, z được điểm B (–2;0;–2) ∈d

Từ đó lập phương trình tham số đường thẳng d qua A, B

Cách 3: Trên d lấy điểm Δ(2;–1;0) và 1 VTPT của (P_1) là $\vec{n_1}(1;-2;-3)$

1 VTPT của (P_2) là $\vec{n_2}(3;2;-5)$

Tính $[\vec{n_1},\vec{n_2}] = (16;-4;8)$ chọn $\vec{n} = \frac{1}{4}[\vec{n_1},\vec{n_2}]$=(4;-1;2)

Chọn $\vec{n}$ làm VTCP của d. Lập phương trình tham số d

Cho phương trình chính tắc của d, quy đồng mẫu số của hệ phương trìn được phương trình đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng.

Sau đây là một số bài toán về phương trình đường thẳng

B. CÁC BÀI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán I:(1) Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M(x_0, y_0, z_0 và Δ vuông góc với mặt phẳng (P)

Phương pháp:

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận một véc tơ phá tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP và Δ đi qua điể M(x_0, y_0, z_0) nên phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \quad (t \in R) \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

Bài 79. Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(3;2;–1) và d vuôn góc với mặt phẳng (P): 2x – y + 7z – 1 = 0

Bài giải

Mặt phẳng (P) có 1 VTPT : $\vec{n} = (2;-1;7)$ vì d vuông góc với (P) nên d nhận làm VTCP và đi qua điểm M có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \quad (t \in R \\ z = -1 + 7t \end{cases}$

(Hoặc lập phương trình chính tắc)

Bài 80. Cho tam giác ABC với A(1;3;2); B(1;2;1), C(1;1;1). Hãy vi phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Bài giải

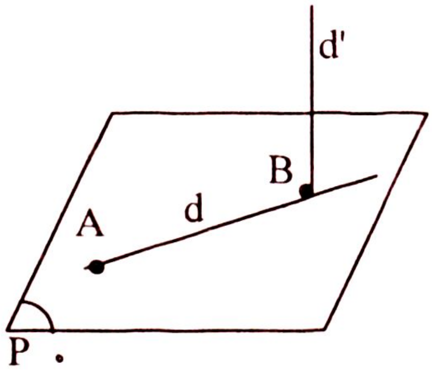
– Tìm trọng tâm G của tam giác ABC: G(1;2; $\frac{4}{3}$)

– Tính $\overrightarrow{AB} = (0; -1; -1), \overrightarrow{AC} = (0; -2; -1); \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right] = (1; 0; 0)$ mặt phẳng (ABC) nhận 2 véc tơ $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right] = (1; 0; 0)$ làm VTPT.

Vậy đường thẳng d đi qua G, d vuông góc với mặt phẳng ABC nên d nhận $\vec{u}$ làm VTCP có phương trình tham số d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases} \quad (t \in R)$

2) Lập phương trình đường thẳng d, đi qua điểm $A(x_0, y_0, z_0)$, d với đường thẳng d' và d cắt đường thẳng d'

hương pháp giải:



Vì mọi đường thẳng qua A vuông góc với d' phải nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và (P) vuông góc với d'. Lập mặt phẳng (P) qua A và (P) vuông góc d'. (P) nhận VTCP của d' làm VTPT

– Tìm B là giao điểm của d' với (P)

– Lập phương trình đường thẳng d qua A, B rõ ràng $d \cap d' = B$ và d vuông góc d', d qua A

ài 81. Cho điểm A(3;2;1) và đường thẳng $d': \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{1}$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua A và d cắt và vuông góc với d;

Bài giải

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và (P) vuông góc với d' nên (P) nhận VTCP của d' là $\vec{a} = (2; 4; 1)$ làm VTPT có phương trình

$$2(x - 3) + 4(y - 2) + 1\,(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y + z - 15 = 0$$

– d' vuông góc với (P) nên d' cắt (P) tại điểm B toạ độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 2t & (1) \\ y = 4t & (2) \\ z = t - 3 & (3) \\ 2x + 4y + z - 15 = 0 & (4) \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2t\,(1) \\ y = 4t\,(2) \\ z = t - 3\,(3) \\ 2x + 4y + -15 = 0\,(4) \end{cases}$

Giải hệ phương trình (1), (2),(3), (4) bằng cách thế (1), (2), (3) vào (4) tìm được $t = \dfrac{6}{7}$ thay $t = \dfrac{6}{7}$ vào (1), (2), (3) ta tìm được toạ độ điểm $B = \left(\dfrac{12}{7}; \dfrac{24}{4}; -\dfrac{15}{7}\right)$

– Lập phương trình đường thẳng d qua AB: $\overrightarrow{AB}=(-\frac{9}{7};\frac{10}{7};-\frac{22}{7})$

Chọn 1 véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(9;-10;22)$

Phương trình chính tắc của d: $\frac{x-2}{9}=\frac{y-4}{-10}=\frac{z-1}{22}$

Chứng minh: Theo cách lập d thì d đi qua A và d đi qua B nằm trên d'. Vậy d cắt d' tại B và d $\subset$(P) mà d' vuông góc (P) nên d'$\perp$d (ĐPCM)

Bài toán II: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(x_0, y_0, z_0), và d vuông góc với hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

Phương pháp giải:

– Lấy 1 VTCP của D_1 là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và 1 VTCP của D_2 là $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$

– Tính $\vec{u}=[\vec{a},\vec{b}]$

– Lập phương trình đường thẳng D đi qua điểm M và nhận $\vec{u}$ làm véc tơ chỉ phương.

– Vì $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{a}\\ \vec{u}\perp\vec{b}\end{cases}$ nên D vuông góc với D_1 và D_2 và D qua điểm M

Vậy D là đường thẳng phải lập

Bài 82. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(1;2;–3) và d vuông góc với 2 đường thẳng d_1 và d_2

Phương trình đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=-t\\ z=2+3t\end{cases}$ và $d_2:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$

Bài giải

Chọn 1 VTCP của d_1 là $\vec{a}=(1;-1;3)$ và một VTCP của d_2 là $\vec{b}=(1;-1;2)$.

Tính $[\vec{a},\vec{b}]=[5;5;0]$ chọn $\vec{u}=\frac{1}{5}[\vec{a},\vec{b}]=(1;1;0)$

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và d nhận $\vec{u}$ làm 1 VTCP: có dạng phương trình: $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\ (t\in R)\\ z=-3\end{cases}$

Chứng minh: Theo cách lập d đi qua điểm M và VTCP của d là $\vec{u}$ mà $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{a}\\ \vec{u}\perp\vec{b}\end{cases}$ nên $\begin{cases}d\perp d_1\\ d\perp d_2\end{cases}$. Vậy d là đường thẳng phải lập.

Bài toán III: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$, và d vuông góc với đường thẳng d_1 và d cắt d_2.

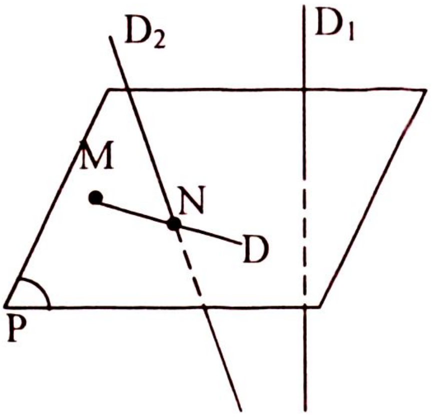
Phương pháp giải:

Mọi đường thẳng đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng D_1 nằm trong mặt phẳng (P) đi qua M và (P) vuông góc với đường thẳng D_1

– Tìm điểm $N = D_2 \cap (P)$

– Lập phương trình đường thẳng D đi qua điểm M, N.

– Chứng minh theo cách lập D qua M, D qua N thuộc D_2. Vậy D cắt D_2, D nằm trong (P) mà (P) vuông góc với D_1 nên D vuông góc với D_1

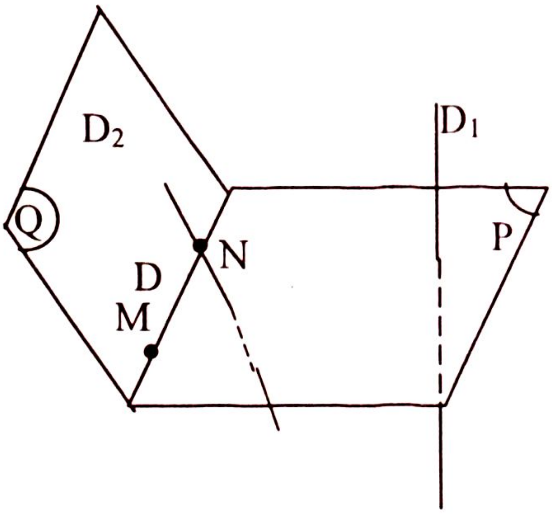


Cách 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và $(P) \perp D_1$

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M và chứa đường thẳng D_2

– (P) và (Q) có 1 điểm chung là M nên (P) cắt (Q) theo giao tuyến là đường thẳng D đi qua M

– Chứng minh: Rõ ràng D đi qua M D_2 cắt (P) tại N nằm trên D và $D \subset (P)$ nên $D \perp D_1$



Bài 83: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(0;1;1) d vuông góc với đường thẳng d_1 có phương trình: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ và d cắt đường thẳng d_2 có phương trình là: $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$

Bài giải

Cách 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(0–;1;1) và (P) vuông góc với d_1 nên (P) nhận VTCP của d_1 là $\vec{a} = (3;1;1) \Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0$

– Tìm điểm N là giao điểm của d_2 với mặt phẳng (P) toạ độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = t + 1 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$ ta được N(−1;2;3)

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm M, N

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 2)$ đường thẳng d qua M nhận $\overrightarrow{MN}$ làm VTCP có phương trình chính tắc: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$

– Chứng minh: Theo cách lập, d đi qua điểm M, d đi qua N mà N thuộc d_2 nên d cắt d_2, d đi qua 2 điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) nên d nằm trong mặt phẳng (P) mà d_1 vuông góc với (P) nên d_1 vuông góc d

Cách 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, P vuông góc d_1, theo cách 1 ta được mặt phẳng (P): $3x + y + z - 2 = 0$

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M, (Q) chứa đường thẳng d_2: trên d_2 lấy điểm A, A(−1;1;2) lập véc tơ $\overrightarrow{AM} = (1; 0; -1)$, VTCP của d_2 là $\vec{b} = (0; 1; 1)$

Tính $[\overrightarrow{AM}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1; -1; 1) = \vec{n}$

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm M và nhận $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{b}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n}$ làm VTPT (Q) có phương trình: $x - y + z = 0$

Mặt phẳng (P) và (Q) có 1 điểm chung là M nên (P) cắt (Q) theo giao tuyến là đường thẳng d: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

Đặt $x = -t$ thay vào hệ phương trình

Ta được: $\begin{cases} -y + z = t \\ y + z = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Ta được phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \quad (t \in R) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Chứng minh d là đường thẳng phải lập vì d đi qua điểm M, d ∈ (P) mà $d_1 \perp (P)$ nên $d \perp d_1$, d là giao tuyến của (P) và (Q) nên d_2 và d cùng nằm trong (Q) d cắt d_2 tại N. Vậy d là đường thẳng phải lập. (Nếu $d_2 \perp d_1$, d_2 chéo d_1 mà d_2 vuông góc d_1 thì không tồn tại điểm N. Bài toán vô nghiệm).

Bài toán IV:

Loại I: **Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(x_0, y_0, z_0) và đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.**

Phương pháp giải: Chú ý: Trước hết phải xét vị trí tương đối của 2 đường thẳng d_1 và d_2. Có các trường hợp sau:

+ Nếu d_1 cắt d_2 tại điểm N thì đường thẳng d phải lập đi qua 2 điểm M, N.

+ Nếu d_1 song song với d_2, nếu điểm M nằm trong mặt phẳng (d_1, d_2) thì qua M có vô số đường thẳng d. Nếu M không nằm trên mặt phẳng (d_1, d_2) thì bài toán vô nghiệm.

+ Nếu d_1 trùng với d_2 thì qua M có vô số đường thẳng d cắt d_1 và d_2.

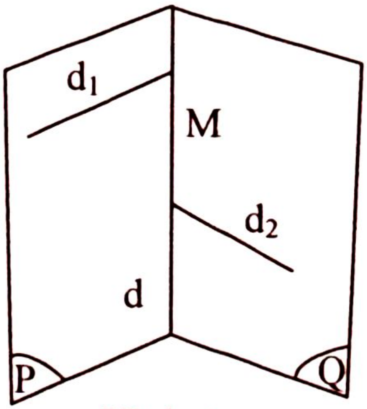
+ Nếu d_1 chéo d_2. Bài toán này xét d_1 chéo d_2.

Cách 1 (hình 4)

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường thẳng d_1.

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M, (Q) chứa đường thẳng d_2.

– Chứng minh mặt phẳng (P) và (Q) có 1 điểm chung nên (P) cắt (Q) theo giao tuyến d đi qua M và chứng minh d_1 cắt d, d_2 cắt d (nếu d_1 hoặc d_2 song song với giao tuyến d thì bài toán vô nghiệm).



Hình 4

Cách 2 (hình 5)

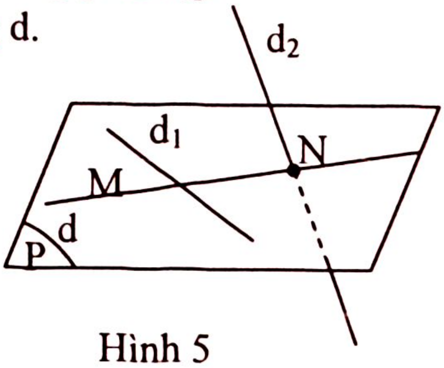
– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và đi qua điểm M

– Tìm điểm N là giao điểm của d_2 với mặt phẳng (P)

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm M, N

– Chứng minh d là đường thẳng phải lập.

– Biện luận số đường thẳng d.



Hình 5

Bài 84: Cho 2 đường thẳng d_1 và d_2:

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ và điểm } M(1; 1; 1)$$

Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M đồng thời d cắt đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2.

Bài giải

Trước hết phải chứng minh d_1 chéo d_2. Đường thẳng d_1 đi qua điểm A(1; 1; −1) và có 1 véc tơ chỉ phương là: $\vec{a} = (3; 1; -2)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm B(−2; 0; 2) và 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{b} = (2; -1; 1)$.

Tính $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AB} = 5 \neq 0$. Vậy 3 véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng, nên đường thẳng d_1 chéo d_2.

Cách 1:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) đi qua điểm M.

+ Mặt phẳng (P) nhận 2 véc tơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AM}$ làm cặp véc tơ chỉ phương. Chọn véc tơ chỉ phương của AM là $\vec{u} = (0; 0; 1)$ $[\vec{u}, \vec{a}] = (-1; 3; 0) = \vec{n_1}$

+ (P) đi qua điểm M và nhận $\vec{n_1}$ làm véc tơ chỉ phương phương trình mặt phẳng (P): $x - 3y + 2 = 0$.

Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M và chứa đường thẳng d_2. Lập tương tự như mặt phẳng (P).

Phương trình mặt phẳng (Q): $y + z - 2 = 0$

– Mặt phẳng (P) và (Q) có 1 điểm chung là M nên (P) ∩ (Q) theo giao tuyến d: $\begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$ có phương trình tham số d $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$

– Chứng minh d là đường thẳng phải lập

+ Theo cách lập d đi qua điểm M

+ d và d_1 cùng thuộc mặt phẳng (P), d có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (3; 1; -1)$. Không cùng phương với véc tơ chỉ phương của d_1 là $\vec{a}$.

Vì $\frac{3}{3} = \frac{1}{1} = 1 \neq \frac{-2}{-1}$ nên d cắt d_1

+ Tương tự d cắt d_2

Cách 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và (P) chứa d_1 lập theo cách 1: Phương trình mặt phẳng (P): $x - 3y + 2 = 0$

– Tìm điểm N là giao của đường thẳng d_2 với mặt phẳng (P) ta được điểm N(–2; 0; 2)

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm M, N. Chọn 1 véc tơ chỉ phương của MN là $\vec{v} = (3;\ 1;\ -1)$. Đường thẳng d có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

– Chứng minh d là đường thẳng phải lập:

+ Theo cách lập d đi qua điểm M

+ d đi qua điểm N thuộc d_2 nên $d \cap d_2 = N$

+ Đường thẳng d và d_1 cùng nằm trong một mặt phẳng có 2 véc tơ chỉ phương không cùng phương nên d cắt d_1.

Loại II: Lập phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d', đồng thời d cắt 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.

Cách 1: (hình 6)

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và mặt phẳng (P) song song với đường thẳng d': mặt phẳng (P) đi qua điểm $M \in d_1$ và nhận véc tơ chỉ phương của d' là $\vec{u}$ và véc tơ chỉ phương của d_1 là $\vec{a}$ làm cặp véc tơ chỉ phương nên nhận $\overrightarrow{n_1} = [\vec{u}, \vec{a}]$ làm véc tơ pháp tuyến.

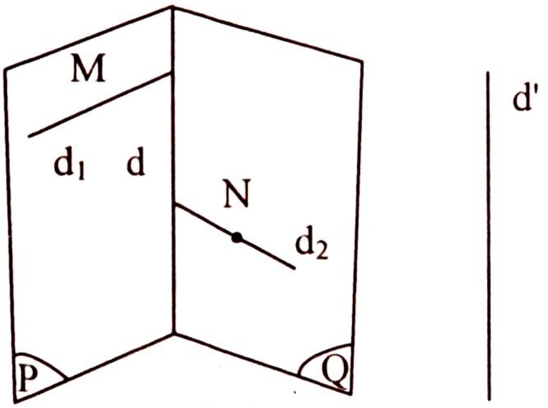
– Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d_2 và mặt phẳng (Q) // d'.

– Chứng minh (P) cắt (Q) theo giao tuyến d:

+ d và d_1 cùng nằm trong mặt phẳng (P) có 2 véc tơ chỉ phương không cùng phương nên d cắt d_1

+ Tương tự d_2 cắt d

+ d // d'



Hình 6

Cách 2: (hình 7)

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) // d' (lập theo cách 1)

– Tìm điểm $A = d_2 \cap (P)$

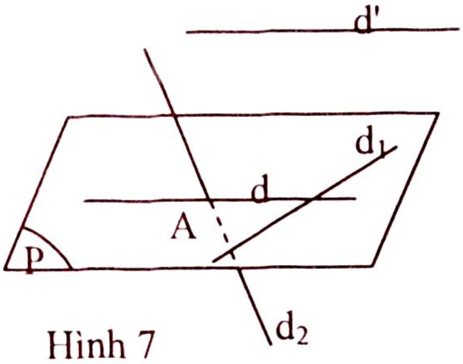
– Lập phương trình đường thẳng d đi qua A và d song song với d'

– Chứng minh:

+ d đi qua $A \in d_2$ nên $d \cap d_2 = A$

+ d đi qua $A \in (P)$, d' // (P) mà d // d' nên $d' \subset (P)$

+ d và d_1 cùng nằm trong (P). Có 2 véc tơ chỉ phương không cùng phương nên $d \cap d_2$.



Hình 7

Cách 3: Trên d_1 lấy điểm M (phụ thuộc t_1). Trên d_2 lấy điểm N (phụ thuộc t_2). Lập $\overrightarrow{MN}$.

– Tìm t_1 và t_2 để MN // d'

Ta được $\begin{cases} M \in d_1 \\ N \in d_2 \end{cases}$ mà MN // d'. Vậy đường thẳng d đi qua MN là đường thẳng phải lập.

Chú ý: Nếu chưa có giả thiết d_1 chéo d_2 phải chứng minh d_1 chéo d_2

Bài 85: Cho đường thẳng d': $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$ và 2 đường thẳng chéo nhau, d_1: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{1}$, d_2: $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$

Lập phương trình đường thẳng d song song với d' và d cắt cả 2 đường thẳng d_1 và d_2

Bài giải

Cách 1:

– Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; -2; -1)$.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm M(2; –2; 1) và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{a} = (3; 4; 1)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm N(7; 3; 9) và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{b} = (1; 2; -1)$.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và P // d' nên mặt phẳng (P) đi qua điểm M và nhận 2 véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{a}$ làm cặp véc tơ chỉ phương nên nhận $\vec{n_1} = \dfrac{1}{2}[\vec{u}, \vec{a}] = (1; -3; 9)$ làm 1 véc tơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (P) có phương trình: $x - 3y + 9z - 17 = 0$

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_2 và Q // d'

Phương trình (Q): $2x + y + 4z - 53 = 0$

Vì $1 : (-3) : 9 \neq 2 : 1 : 4$ nên $(P) \cap (Q) = d$

Phương trình đường thẳng d $\begin{cases} x = 3t + \dfrac{18}{7} \\ y = -2t - \dfrac{41}{7} \\ z = -t + \dfrac{94}{7} \end{cases}$ (t ∈ R)

Chứng minh:

$$+ \text{Do} \begin{cases} P \,//\, d' \\ Q \,//\, d' \\ d_1 \subset (P) \\ d_2 \subset (Q \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \quad \text{nên } d \,//\, d'$$

+ Véc tơ chỉ phương của d_1 và d không cùng phương mà d, d_1 cùng nằm trong (P) nên d cắt d_1. Tương tự d cắt d_2

Vậy d là đường thẳng phải lập

Cách 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) // d' lập theo cách 1 được mặt phẳng (P): $x - 3y + 9z - 17 = 0$

– Tìm điểm A là giao điểm của d_2 với (P) có tọa độ $A\left(\frac{18}{7}; -\frac{41}{7}; \frac{94}{7}\right)$

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua A và d // d'

$$d: \frac{x - \frac{18}{7}}{3} = \frac{y + \frac{41}{7}}{-2} = \frac{z - \frac{94}{7}}{-1}$$

– Chứng minh:

+ Theo cách lập d // d'

+ d đi qua điểm $A \in d_2$ nên $d \cap d_2$

+ d và d_1 cùng nằm trong (P) có 2 véc tơ chỉ phương của chúng không cùng phương nên d cắt d_1

Vậy d là đường thẳng phải lập

Loại III: Lập phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (R) và d cắt hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2

Phương pháp: Dùng các cách giải của loại II bài toán 4. Trong các cách giải chỉ việc thay "nhận $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d" bằng "nhận $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của (R) là véc tơ $\vec{n}$". Tìm d // d' bằng "đường thẳng d song song với $\vec{n}$"

Bài 86: Lập phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (R): $x + y + z = 1$ và d cắt 2 đường thẳng d_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = z$ và

$$d_2: \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = -3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in R)$$

Bài giải

– Mặt phẳng (R) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$. Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1; -1; 0)$ và có 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{a} = (2; -1; 1)$.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) ⊥ mặt phẳng (R) nên (P) đi qua điểm M và nhận $\vec{n}$ và $\vec{a}$ làm cặp véc tơ chỉ phương nên (P) nhận $\vec{n} = [\vec{n}, \vec{a}] = (2; 1; -3)$ làm 1 véc tơ pháp tuyến (P) có phương trình: $2x + y - 3z - 1 = 0$

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d_2 và (Q) ⊥ (R). Lập tương tự như lập mặt phẳng (P) ta được mặt phẳng (Q): $x - 2y + z - 4 = 0$.

– Mặt phẳng (P) cắt (Q) theo giao tuyến d $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ và d có

phương trình tham số: $\begin{cases} x = \frac{6}{5} + t \\ y = -\frac{7}{5} + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in R)$

Chứng minh: 2 mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d và (P) và (Q) cùng vuông góc với (R) nên d ⊥ (R); 2 đường thẳng d và d_1 cùng nằm trong mặt phẳng (P) có 2 véc tơ chỉ phương không cùng phương nên d cắt d_1 tương tự d cắt d_2

Cách 2: Lập mặt phẳng (P) giống cách 1

– Tìm điểm $A = d_2 \cap (P)$

– Lập phương trình đường thẳng d qua A và d ⊥ (R)

d chính là đường thẳng phải lập.

Loại IV: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(x_0; y_0; z_0 song song với mặt phẳng (Q) và d cắt đường thẳng d'.

Cách 1:

– Trên đường thẳng d' viết dưới dạng tham số lấy điểm N (N phụ thuộc t)

– Lập véc tơ $\overrightarrow{MN}$

– Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}$

– Tìm t để MN // (Q) khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}.\vec{n} = 0$ tìm t ta tìm được điểm $N \in d'$

– Lập đường thẳng d đi qua MN

Chứng minh:

+ Do $M \in (d)$ nên d qua điểm M

+ d qua $N \in d'$ vậy d cắt d'

+ M, N $\notin$ Q mà $\overrightarrow{MN}.\vec{n} = 0$ nên MN // (Q) tức d // (Q)

Cách 2: (hình 8)

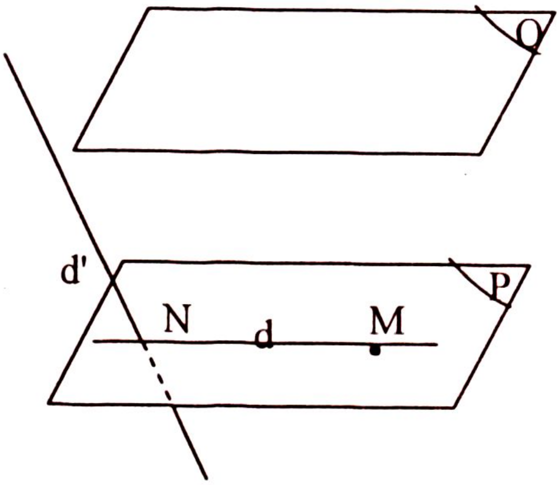
– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M, (P) // (Q)

– Tìm $N = d' \cap (P)$

– Lập đường thẳng d qua MN

– Chứng minh d là đường thẳng phải lập

Vì d qua M; d qua $N \in d'$ nên d cắt d'. M, N $\in$ (P) mà (P) // (Q) nên M, N tức d // (Q)



Hình 8

Bài 87: Cho điểm M(1; 2; 1) và mặt phẳng (Q): $2x - y + z + 1 = 0$. Đường thẳng d': $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$. Hãy lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M, d song song với mặt phẳng (Q) và d cắt d'.

Bài giải

Cách 1:

– Trên d' lấy điểm N di động N(t; 2 – t; 2t – 4) (với $t \in R$)

– Lập véc tơ $\overrightarrow{MN} = (t - 1; -t; 2t - 5)$

– Tìm điểm N sao cho MN // (Q) khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}$ vuông góc với véc tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n} = (2; -1; 1)$ (Vì M $\notin$ (Q)) tức là khi:

$$\overrightarrow{MN}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 + t + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow 5t = 7 \Leftrightarrow t = \frac{7}{5}$$

Khi $t = \frac{7}{5}$ được $N(\frac{7}{5};\frac{3}{5};-\frac{6}{5}) \in d'$ mà MN // (Q)

– Lập phương trình đường thẳng d qua 2 điểm MN. Chọn 1 véc tơ chỉ phương của MN là $\vec{u} = (2; -7; -11)$. Vậy phương trình đường thẳng d phải lập có dạng: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-1}{-11}$

Chứng minh:

– Theo cách lập d đi qua điểm M

– d đi qua N mà $N \in d'$ vậy d cắt d'

– Vì $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$, mà M, N $\notin$ (Q) nên d' // (Q)

Cách 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và (P) // (Q)

+ Do (P) // (Q) nên (P) có dạng: $2x - y + z + D = 0$ ($D \neq 1$)

+ Cho (P) đi qua M ta được phương trình (P): $2x - y + z - 1 = 0$

– Tìm điểm N = (P) ∩ d'. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = t\,(1) \\ y = 2 - t\,(2) \\ z = 2t - 4\,(3) \\ 2x - y + z - 1 = 0\,(4) \end{cases} \Rightarrow t = \frac{7}{5}$$

Thay $t = \frac{7}{5}$ vào (1), (2), (3) ta được tọa độ điểm $N\left(\frac{7}{5};\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm M, N

Phương trình đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-1}{-11}$

Chứng minh: Theo cách lập ta đã có:

+ d qua điểm M

+ d qua điểm $N \in d'$ vậy d cắt d'

+ M, N ∈ d, mà M, N ∈ (P) nên d ⊂ (P) mà (P) // (Q) nên MN song song với (Q)

Vậy d là đường thẳng phải lập

Bài toán V: Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

Cho 2 đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau (nếu đề bài chưa cho 2 đường thẳng chéo nhau thì phải chứng minh d_1 chéo d_2): đường thẳng d được gọi là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 khi và chỉ khi d_1 cắt d, d_2 cắt d và đồng thời đường thẳng d vuông góc với cả 2 đường thẳng d_1 và d_2.

Để lập được đường thẳng d có các phương pháp sau:

Phương pháp thứ nhất (hình 9)

– Lấy 1 véc tơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là $\vec{a}$

1 véc tơ chỉ phương của đường thẳng d_2 là véc tơ $\vec{b}$

Tính $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{u}$

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) song song với véc tơ $\vec{u}$. Như vậy (P) đi qua 1 điểm $M \in d_1$ và nhận 2 véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{u}$ làm cặp véc tơ chỉ phương nên nhận $\overrightarrow{n_1} = [\vec{a}, \vec{u}]$ làm véc tơ pháp tuyến.

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d_2 và (Q) song song với $\vec{u}$

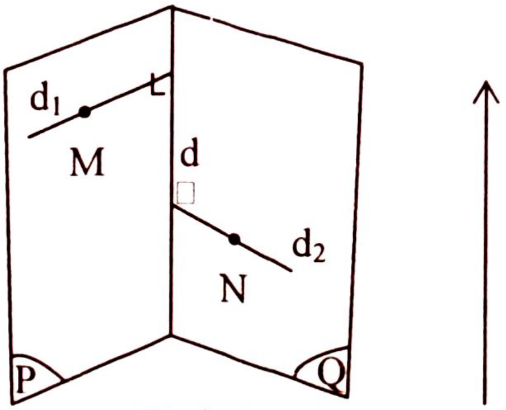
– Chứng minh giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q) là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

+ Vì $\vec{u} \perp \vec{a}$ và $\vec{u} \perp \vec{b}$ nên $d \perp d_1$ và $d \perp d_2$

+ d và d_1 cùng nằm trong mặt phẳng (P) mà $d \perp d_1$ nên d cắt d_1

d và d_2 cùng nằm trong mặt phẳng (Q) mà $d \perp d_2$ nên d cắt d_2

Vậy d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2



Hình 9

Phương pháp thứ 2 (hình 10)

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) song song với $\vec{u}$ (lập theo phương pháp 1).

– Tìm tọa độ điểm A là giao điểm của đường thẳng d_2 với mặt phẳng (P)

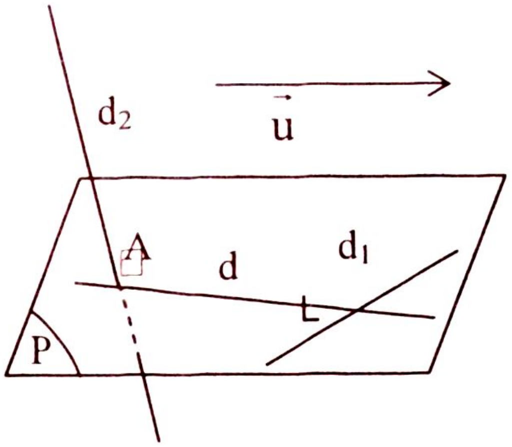
– Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và d song song với $\vec{u}$

– Chứng minh d là đường thẳng phải lập:

+ Theo cách lập d qua $A \in d_2$ nên d cắt d_2

+ d // $\vec{u}$ mà $\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{u} \perp \vec{b}$ nên $d \perp d_1$, $d \perp d_2$

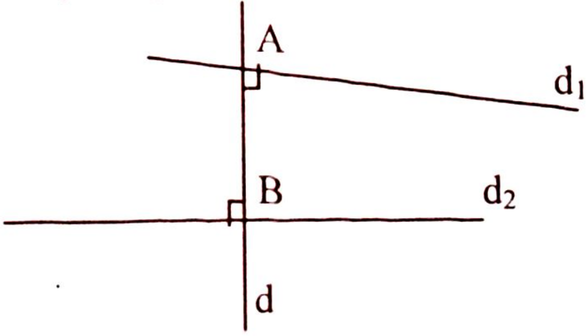
+ d và d_1 cùng nằm trong (P) mà $d \perp d_1$ nên d cắt d_1 vậy d là đường thẳng phải lập.



Hình 10

Phương pháp thứ 3 (hình 11)

- Từ phương trình tham số của d_1 và d_2 lấy điểm A di động trên d_1 (phụ thuộc t_1) lấy điểm B di động trên d_2 (phụ thuộc t_2), gọi 1 véc tơ chỉ phương của d_1 là $\vec{a}$, 1 véc tơ chỉ phương của d_2 là $\vec{b}$.
- Tìm điểm A, B sao cho $AB \perp d_1$ và $AB \perp d_2$
- Lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm A, B
- Đường thẳng d cắt 2 đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A và B đồng thời d vuông góc với d_1 và d_2. Vậy d là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2



Hình 11

Bài 88: Lập phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình d_1: $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$, d_2: $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

Bài giải

Trước hết chứng minh 2 đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau

- Đường thẳng d_1 đi qua điểm M(7; 3; 9) và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; -1)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm N(3; 1; 1) và có 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{b} = (-7; 2; 3)$
- Lập véc tơ $\overrightarrow{NM} = (4; 2; 8)$

– Tính $[\vec{a},\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -7\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 2\\ -7 & 2\end{vmatrix}\right) = (8;\ 4;\ 16)$

$[\vec{a},\vec{b}].\overrightarrow{MN} = 168 \neq 0$

Vậy 3 véc tơ $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{NM}$ không đồng phẳng. Do đó đường thẳng d_1 chéo với đường thẳng d_2. Dưới đây là 3 phương pháp lập phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2

Phương pháp thứ nhất: Vì $[\vec{a},\vec{b}] = (8;\ 4;\ 16)$

Chọn $\vec{u} = \frac{1}{4}[\vec{a},\vec{b}] = (2;\ 1;\ 4)$

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) // $\vec{u}$. Như vậy (P) đi qua điểm M và nhận 2 véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{u}$ làm cặp véc tơ chỉ phương nên nhận $\left[\vec{a},\vec{u}\right] = (9;\ -6;\ -3)$ làm 1 véc tơ pháp tuyến, chọn $\overrightarrow{n_1} = (3;\ -2;\ -1)$ là 1 véc tơ pháp tuyến của (P) có phương trình:

$$3x - 2y - z - 6 = 0$$

– Tìm điểm B là giao điểm của d_2 với mặt phẳng (P), tọa độ điểm B là nghiệm của phương trình: $\begin{cases} x = 3 - 7t & (1)\\ y = 1 + 2t & (2)\\ z = 1 + 3t & (3)\\ 3x - 2y - z - 6 = 0 & (4)\end{cases}$

Giải hệ (1),(2),(3), (4) bằng cách thế (1), (2), (3) vào (4) tìm được $t = 0$

Vậy B(3; 1; 1)

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm B và d // $\vec{u}$ nên d nhận $\vec{u}$ làm 1 véc tơ chỉ phương. Ta được phương trình chính tắc của đường thẳng d': $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}$

Chứng minh:

+ Vì d đi qua điểm $B \in d_2$ nên d cắt d_2

+ d // $\vec{u}$ mà $\begin{cases}\vec{u} \perp \vec{a}\\ \vec{u} \perp \vec{b}\end{cases}$ nên $\begin{cases} d \perp d_1\\ d \perp d_2\end{cases}$

+ d và d_1 cùng nằm trong mặt phẳng (P) mà $d \perp d_1$ nên d cắt d_1

Do đó d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

Phương pháp thứ 2:

– Phương trình tham số của d_1: $\begin{cases} x = 7 + t_1\\ y = 3 + 2t_1\\ z = 9 - t_2\end{cases}$; d_2: $\begin{cases} x = 3 - 7t_2\\ y = 1 + 2t_2\\ z = 1 + 3t_2\end{cases}$ $(t_1, t_2 \in R)$

– Lấy điểm A di động trên d_1, B di động trên d_2

$A(7 + t_1; 3 + 2t_1; 9 - t_1)$; $B(3 - 7t_2; 1 + 2t_2; 1 + 3t_2)$

Lập $\overrightarrow{AB} = (-7t_2 - t_1 - 4; 2t_2 - 2t_1 - 2; 3t_2 + t_1 - 8)$

– Tìm điểm A, B để: $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t_2 - 6t_1 = 0 \\ 6t_2 + 6t_1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t_1 = t_2 = 0$

Ta được điểm $A(7; 3; 9) \in d_1$ và điểm $B(3; 1; 1) \in d_2$ mà $AB \perp d_1$ và $AB \perp d_2$

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm A, B thì d chính là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

Phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{4}$

Phương pháp thứ 3:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) song song với véc tơ $\vec{u}$, mặt phẳng (P) có phương trình là: $3x - 2y - z - 6 = 0$

– Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d_2 và (Q) // $\vec{u}$, mặt phẳng (Q) có phương trình: $5x + 34y - 11z - 38 = 0$

– Vì $3 : (-2) : (-1) \neq 5 : 34 : (-11)$ nên (P) cắt (Q) theo giao tuyến d:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \end{cases}$$

Phương trình tham số của d có dạng: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 4t - 3 \end{cases}$ $(t \in R)$

Chứng minh: Vì 2 mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với $\vec{u}$ mà (P) cắt (Q) theo giao tuyến d nên d song song với $\vec{u}$ mà $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{a} \\ \vec{u} \perp \vec{b} \end{cases}$ nên $\begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \end{cases}$

Do d và d_1, d và d_2 cùng nằm trong 1 mặt phẳng mà vuông góc với nhau nên d cắt d_1, d cắt d_2. Do đó d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Bài 89: Cho 2 đường thẳng d_1 $\begin{cases} x = t - 6 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$; d_2: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$

a) Chứng minh rằng d_1 chéo d_2 và $d_1 \perp d_2$

b) Lập phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 dưới dạng chính tắc.

Bài giải

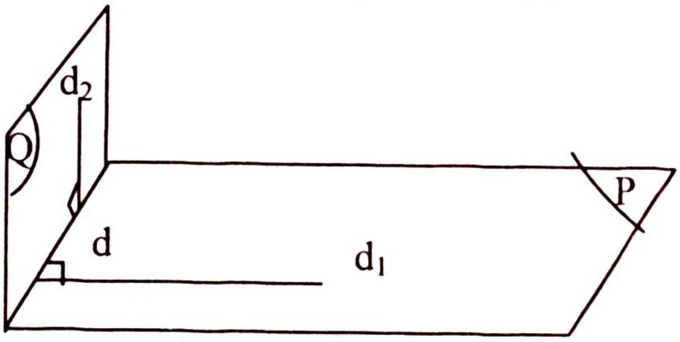
a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(-6; 3; 0)$ và có 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; 0; 1)$. Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(2; 1; 2)$ và có 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{b} = (1; -1; -1)$

Ta có $[\vec{a},\vec{b}] = (1; 2; -1) = \vec{u}; \overrightarrow{NM} = (8; -2; 2)$

$[\vec{a},\vec{b}].\overrightarrow{NM} = 8 - 4 - 2 = 2 \neq 0$, vậy 3 véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{NM}$ không đồng phẳng nên d_1 chéo d_2

Và $[\vec{a},\vec{b}] = 1 + (-1.0) - 1 = 0$ nên $\vec{a} \perp \vec{b}$. Vậy d_1 vuông góc với d_2

b) **Cách 1** (hình 12)



Hình 12

Vì d_1 chéo d_2 và $d_1 \perp d_2$ nên:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1, (P) $\perp d_2$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M \in d_1$ và (P) nhận $\vec{b}$ làm 1 véc tơ pháp tuyến

Phương trình (P): $1(x + 6) - 1(y - 3) - 1(z + 0) = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 9 = 0$

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_2 và (Q) $\perp d_1$

Phương trình mặt phẳng (Q): $y + z - 4 = 0$

– Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc với nhau nên cắt nhau theo giao tuyến d $\begin{cases} x - y - z + 9 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$

d có 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; -1)$

Và d đi qua điểm A(0; 5; 4)

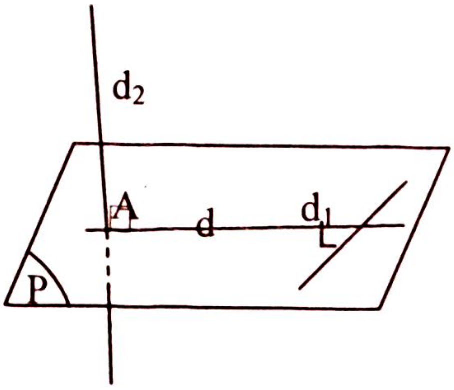
d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$

Chứng minh d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2. Vì

+ $d_1 \subset (P)$, $d_2 \subset (Q)$ mà $d_1 \perp (Q)$, $d_2 \perp (P)$, $d = (P) \cap (Q)$ nên $d \perp d_1$, $d \perp d_2$.

+ d và d_1 cùng nằm trong (P) và vuông góc nhau nên d cắt d_1, tương tự d cắt d_2.

Cách 2: Hình 13



Hình 13

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) vuông góc với d_2. Theo cách 1 ta có phương trình mặt phẳng (P): $x - y - z + 9 = 0$

– Tìm điểm $A = d_2 \cap (P)$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 2 + t & (1) \\ y = 1 - t & (2) \\ z = 2 - t & (3) \\ x - y - z + 9 = 0 & (4) \end{cases}$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta được tọa độ điểm $A\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{14}{3}\right)$

– Tìm hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d_1 là điểm B (bài toán tìm điểm B sẽ được trình bày ở phần khoảng cách từ điểm đến đường) ở đây, tìm điểm B như sau:

Trên d_1 lấy điểm B di động B(t – 6; 3; t) lập $\overrightarrow{BA} = \left(-t + \frac{16}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3} - t\right)$.

Tìm điểm B sao cho $AB \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow t = 5$ với t = 5 được điểm B(–1; 3; 5) là hình chiếu của A trên d_1.

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm A, B

Có phương trình chính tắc: $\frac{x + 1}{1} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 5}{-1}$

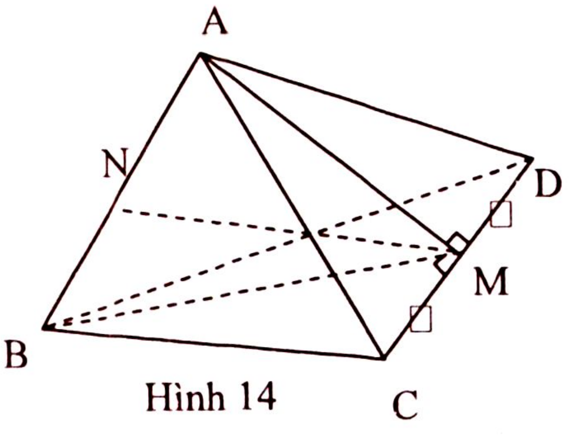
– Chứng minh d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2: Rõ ràng d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A, B và d vuông góc với cả d_1 và d_2.

Bài này có thể giải theo các cách của bài 88.

Bài 90: Cho tứ diện ABCD với A(2; 3; 2), B(6; –1; –2), C(–1; –4; 3), D(1; 6; –5)

Lập phương trình đường vuông góc chung của AB và CD

Bài giải (hình 14)



Hình 14

Tính AD, AC, BC, BD ta được

$AC = AD = \sqrt{59}$ nên ΔACD cân đỉnh A

$BC = BD = \sqrt{83}$ nên ΔBCD cân đỉnh B

Lấy M trung điểm của CD: M(0; 1; –1) thì

CD ⊥ AM ⊂ (ABM) và CD ⊥BM ⊂ (AMB)

Nên CD ⊥ mặt phẳng (ABM)

Từ M trong tam giác ABM kẻ MN ⊥ AB thì MN ⊥ CD tại M

MN ⊥ AB tại N. Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

– Tìm hình chiếu vuông góc của M trên AB

+ Lập phương trình tham số của đường thẳng AB

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \quad \text{với } t \in R \\ z = 2 - t \end{cases}$$

+ Trên AB lấy điểm N di động N(t + 2; 3 – t; 2 – t)

+ Lập $\overrightarrow{MN} = (2 + t; 1 - t; 3 - t)$

+ Tìm điểm N để MN ⊥ AB ⇔ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$. Ta được $N\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$ là hình chiếu của M trên AB.

– Lập phương trình đường thẳng qua MN, MN là đường vuông góc chung của AB và CD

+ Chọn 1 véc tơ chỉ phương của MN là $\vec{u} = (8; 4; 7)$

+ Phương trình đường MN: $\frac{x - 0}{8} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z + 1}{7}$

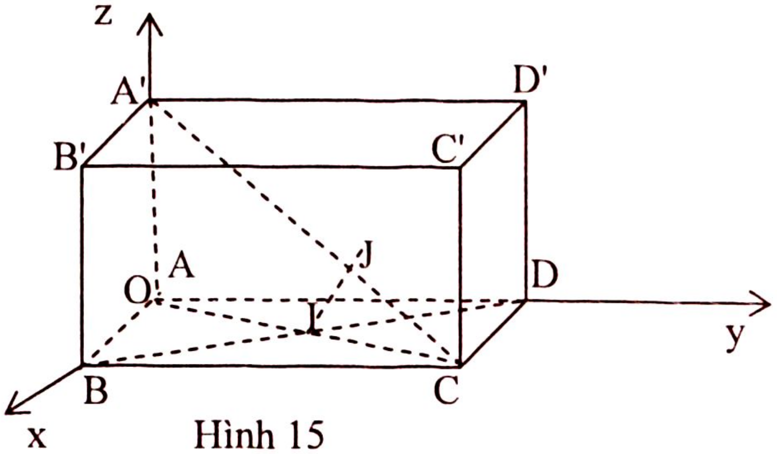
Là đường vuông góc chung của AB và CD

Chú ý: Nếu ABCD là tứ diện gần đều: AC = BD, BC = AD, AB = CD thì chứng minh: M trung điểm CD, N trung điểm AB thì MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

Bài 91: Cho hình lập phương ABCD A'B'C' D' với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1)

Lập phương trình đường vuông góc chung của A'C và BD

Bài giải



Hình 15

Gọi I là tâm của hình vuông ABCD

$C(1;\ 1;\ 0)$, $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

Trong mặt phẳng (ABCD): $BD \perp AC \subset (A'AC)$; $BD \perp AA' \subset (A'AC)$

Vậy $BD \perp (A'AC)$

Trong $\Delta A'AC$: từ I kẻ $IJ \perp A'C$ tại J

Vì $IJ \subset (A'AC)$ mà $BD \perp (A'AC)$ nên $IJ \perp BD$ tại I

Vậy IJ là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau BD và A'C.

* Tìm điểm J là hình chiếu vuông góc của điểm I trên A'C.

+ Phương trình tham số của A'C $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in R)$

+ Trên A'C lấy điểm J di động

$J(t;\ t;\ 1-t)\ (t \in R)$

$\overrightarrow{IJ} = \left(t - \frac{1}{2}; t - \frac{1}{2}; -t + 1\right)$

1 véc tơ chỉ phương của A'C là $\vec{u} = (1;\ 1;\ -1)$

+ Tìm J để $IJ \perp A'C \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ được $J\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

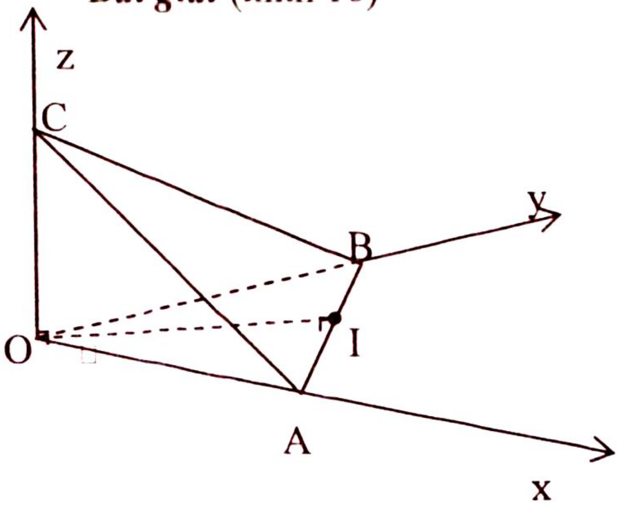
– Lập phương trình đường thẳng qua IJ, chọn 1 véc tơ chỉ phương của IJ là $\vec{v} = (1;\ 1;\ 2)$

Phương trình đường vuông góc chung của BD và A'C có dạng:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{1} = \frac{z}{2}$$

Bài 92: Cho khối tứ diện OABC với O là gốc tọa độ, $A(2a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2a;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$ lập phương trình đường vuông góc chung của OC và AB $(a;\ c > 0)$

Bài giải (hình 16)



Hình 16

Do A $\in$ tia Ox, B $\in$ tia Oy, C $\in$ tia Oz nên khối tứ diện OABC có OA $\perp$ OB $\perp$ OC và ΔOAB có OA = OB = 2a nên ΔOAB cân đỉnh O. Gọi I là trung điểm của AB ta được OI $\perp$ AB tại I

CO $\perp$ (OAB) mà OI $\subset$ (OAB) nên OI $\perp$ OC tại O vậy OI là đường vuông góc chung của AB và OC. Ta có I(a; a; 0)

Lập phương trình đường OI dưới dạng tham số $\begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in R) \\ z = 0 \end{cases}$

Bài toán VI: Lập phương trình hình chiếu vuông góc của một đường thẳng d lên mặt phẳng (P)

Phương pháp giải

Ta nhận thấy giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) có 3 vị trí nên ta xét các trường hợp sau:

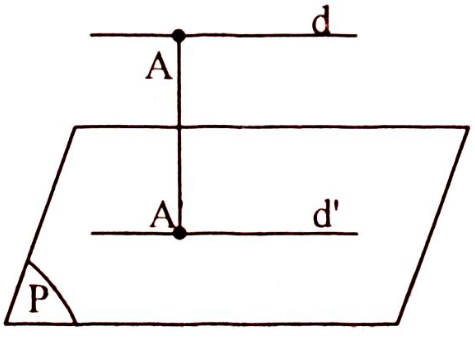
Trường hợp 1: Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thì hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) chính là đường thẳng d.

Trường hợp thứ 2 (hình 17)

Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)

– Trên đường thẳng d lấy 1 điểm A bất kỳ. Tìm điểm A' là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (P).

– Lập phương trình đường thẳng d' đi qua điểm A, d' // d: d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P).



Hình 17

Bài 93: Cho đường thẳng d: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$

và mặt phẳng (P): x + y + z + 1 = 0.

Lập phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P)

Bài giải

– Đường thẳng d đi qua điểm A(–1; 1; 3) thay $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ vào phương trình

mặt phẳng (P) ta được: $-1 + 1 + 3 + 3 = 6 \neq 0$

Chứng tỏ điểm A không nằm trong mặt phẳng (P)

Đường thẳng d có 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -2; 1)$ và mặt phẳng (P) có 1 véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 1)$. Ta có $\vec{n}.\vec{a} = 1 - 2 + 1 = 0$ chứng tỏ $\vec{n} \perp \vec{a}$. Vậy đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

– Tìm điểm A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P)

+ Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A, Δ ⊥ (P) nên Δ nhận $\vec{n} = (1; 1; 1)$ làm 1 véc tơ chỉ phương. Phương trình tham số của

$$\Delta: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \quad (\text{với } t \in R) \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Tìm A' = Δ ∩ (P) tọa độ điểm A' là nghiệm của hệ phương trình

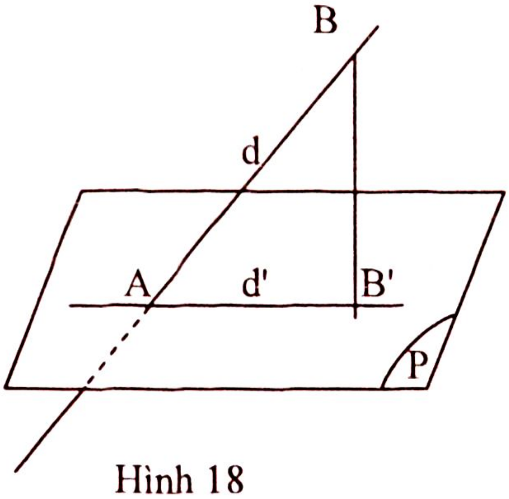
$$\begin{cases} x = t - 1 & (1) \\ y = t + 1 & (2) \\ z = t + 3 & (3) \\ x + y + z + 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta được t = –2 và điểm A'(–3; –1; 1)

– Lập phương trình đường thẳng d' đi qua điểm A' và d' // d; d' nhận 1 véc tơ chỉ phương của d là $\vec{a}$ (1; –2; 1) làm 1 véc tơ chỉ phương có phương trình: $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$

Trường hợp thứ 3: *Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại 1 điểm A duy nhất*

Phương pháp 1 (hình 18)



Hình 18

– Tìm điểm A = d ∩ (P). A là hình chiếu của A trên (P)

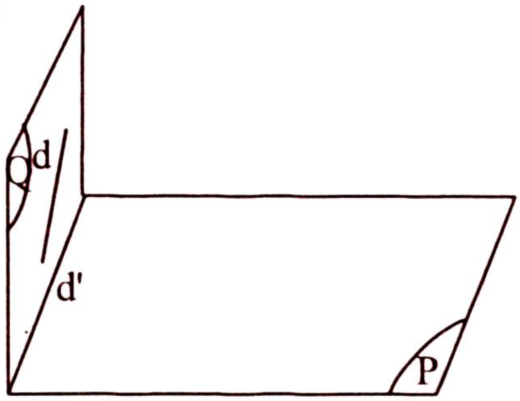
– Trên d lấy điểm B cố định (B ≠ A) tìm hình chiếu của B trên (P) là B'

+ Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua B và Δ ⊥ (P)

+ Tìm B' = Δ ∩ (P)

– Lập phương trình đường thẳng d' đi qua 2 điểm A, B'. Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

Phương pháp 2 (hình 19)



Hình 19

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và (Q) ⊥ (P)

+ Lấy 1 điểm M nằm trên d và 1 véc tơ chỉ phương của d là $\vec{a}$

+ Véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}$ tính $[\vec{a}, \vec{n}] = \vec{n_1}$..

Chọn $\overrightarrow{n_1}$ làm véc tơ pháp tuyến của (Q).

+ Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nhận $\overrightarrow{n_1}$ làm véc tơ pháp tuyến

– (P) ∩ (Q) = d' chứng minh d' là đường phải lập.

Vì (P) ⊥ (Q) thì (P) cắt (Q) theo giả thiết d'. Mọi điểm nằm trên (P) kẻ vuông góc với (P). Thì chân đường vuông góc phải nằm trên giao tuyến d'.

Chú ý: Phải chuyển d' về dạng tham số hoặc chính tắc

Bài 94: Cho đường thẳng d: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$

Và mặt phẳng (P): $2x - 2y + z - 3 = 0$

Lập phương trình hình chiếu vuông góc d' của d lên mặt phẳng (P)

Bài giải

Đường thẳng d đi qua điểm M(–1; 1; 3) và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; -2)$ và (P) có 1 véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -2; 1)$.

Do $\vec{a}.\vec{n} \neq 0$ nên d ∩ (P) tại điểm A duy nhất.

Phương pháp 1:

– Tìm tọa độ điểm A

+ Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = t - 1 & (1) \\ y = 2t + 1 & (2) \quad (t \in R) \\ z = 3 - 2t & (3) \end{cases}$

Phương trình (P): $2x - 2y + z - 3 = 0$ (4)

+ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình (1), (2), (3), (4) giải hệ này bằng cách thế (1), (2), (3) vào (4) ta được $t = -1$. Ta được điểm $A(-2; -1; 5)$

+ Lấy điểm $B(-1; 1; 3) \in$ đường thẳng d

+ Tìm hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng (P) là B'

– Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua B và $\Delta \perp (P)$

Δ nhận 1 véc tơ pháp tuyến của (P) làm véc tơ chỉ phương

$$\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t' & (5) \\ y = 1 - 2t' & (6) \quad (t' \in R) \\ z = 3 + t' & (7) \end{cases}$$

– Tìm điểm $B' = \Delta \cap (P)$ tọa độ điểm B' là nghiệm của hệ phương trình (4), (5), (6), (7). Giải hệ phương trình này ta được $B'\left(-\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{31}{9}\right)$

+ Lập phương trình đường thẳng d' qua 2 điểm A và B'

$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{17}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{14}{9}\right)$ chọn 1 véc tơ chỉ phương của AB' là:

$\vec{u} = (17; 10; -14)$

Phương trình đường thẳng d': $\frac{x+2}{17} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-5}{-14}$

Chứng minh: Đường thẳng d' qua A là hình chiếu của A trên (P), B' là hình chiếu của B trên (P) vậy đường thẳng d' qua A, B' là hình chiếu của d trên (P)

Phương pháp 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và $(Q) \perp (P)$ nên (Q) đi qua điểm $M(-1; 1; 3) \in d$ và nhận $\vec{a}$ và $\vec{n}$ làm cặp véc tơ chỉ phương. Ta có: $[\vec{n}, \vec{a}] = (2; 5; 6)$ nên (Q) nhận $\vec{u} = (2; 5; 6)$ làm véc tơ pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng (Q): $2(x + 1) + 5(y - 1) + 6(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 5y + 6z - 21 = 0$

– Mặt phẳng (P) ∩ mặt phẳng (Q) = d': Là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P)

$$d' \begin{cases} 2x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 5y + 6z - 21 = 0 \end{cases}$$

Phương trình tham số d': $\begin{cases} x = 17t - \frac{3}{10} \\ y = 10t \\ z = -14t + \frac{18}{5} \end{cases} \quad (t \in R)$

Bài tập tự luyện về lập phương trình đường thẳng

Bài 95: Cho đường thẳng d_1: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng (P): $x - y - z - 1 = 0$. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và $d \perp d_1$

Bài 96: Cho tam giác ABC với A(0; 0; 1), B(–1; –2; 0), C(2; 1; –1). Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm của tam giác ABC và d vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Bài 97: Viết phương trình tham số của đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P): $y + 2z = 0$ và d cắt 2 đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases} (t \in R),\ d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 1 \end{cases} (t' \in R)$$

Bài 98: Viết phương trình tham số, chính tắc của đường thẳng đi qua 2 điểm A(2; 3; –1) và B(1; 2; 4)

Bài 99: Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm A(2; 0; –5) và d song song với đường thẳng d': $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-2}{3}$

Bài 100: Cho d là giao tuyến của 2 mặt phẳng

(P): $x + 2y - z = 0$; (Q): $2x - y + z + 1 = 0$

Lập phương trình tham số, chính tắc của d.

Bài 101: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(1; 0; 5) và d vuông góc với 2 đường thẳng d_1 và d_2. Có phương trình:

$$d_1 \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} t \in R \quad d_2 \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + t' \\ z = 1 - 3t' \end{cases} t' \in R$$

Bài 102: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(2; –1; 0) d vuông góc và cắt đường thẳng d': $\begin{cases} x = t \\ y = -3t - 1 \\ z = -2t - 1 \end{cases} (t \in R)$

Bài 103: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(0; 1; 1) d vuông góc với d_1: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$ đồng thời d cắt đường thẳng d_2: $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in R)$

Bài 104: Viết phương trình đường thẳng d song song với trục Oz và d cắt 2 đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình:

$$d_1: \begin{cases} x = -7 + 8t_1 \\ y = -2 + 4t_1 \\ z = 2 + t_1 \end{cases} \quad t_1 \in R\ ; \quad d_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$$

Bài 105: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M\left(\frac{3}{7};\frac{18}{7};\frac{5}{7}\right)$ và d cắt 2 đường thẳng d_1, d_2 có phương trình:

$$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{-1}\ ; \ d_2: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-5}$$

Bài 106: Cho đường thẳng d': $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t \\ z = 3t + 1 \end{cases} \quad (t \in R)$

Và mặt phẳng (P): $x + y + z = 0$

Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A là giao điểm của d' với (P), $d \perp d'$ và $d \subset (P)$

Bài 107: Cho 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 có phương trình:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 0 \\ z = -5 + t_1 \end{cases} \quad t_1 \in R \quad d_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - t_2 \\ z = 5 + 3t_2 \end{cases} \quad t_2 \in R$$

Lập phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2

Bài 108: Cho 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 có phương trình:

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}\ ; \ d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$$

Lập phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Bài 109: Cho 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 có phương trình:

$$d_1: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}\ ; \ d_2: \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Lập phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Bài 110. Cho 2 đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau và vuông góc với nhau.

$$d_1: \begin{cases} x = t_1 \\ y = 2t_1 + 1\,(t_1 \in R) \\ z = 3t_1 + 6 \end{cases} \quad d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

Lập phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

Bài 111. Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 có phương trình

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \quad d_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \quad (t \in R) \\ z = 3 \end{cases}$$

Và mặt phẳng (P): $7x + y - 4z = 0$

Lập phương trình đường thẳng d, d vuông góc mặt phẳng (P) và d cắt cả 2 đường thẳng d_1 và d_2.

Bài 112. Cho điểm A(3;–2;–4) mặt phẳng (P) $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ và đường thẳng $d' : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{2}$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, d cắt dị và d song song với mặt phẳng (P).

Bài 113. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ lên các mặt phẳng toạ độ.

Bài 114. Cho mặt phẳng (P): $x - y + 3z + 8 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{2}$. Lập phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P)

Bài 115. Viết phương trình đường thẳng d song song với d_1 và d cắt cả 2 đường thẳng d_2, d_3. Biết phương trình các đường thẳng d_1, d_2, d_3 là:

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t_1 \quad (t \in R) \\ z = 1 - t_1 \end{cases}$$

$$d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3}$$

$$d_3 : \begin{cases} x = -4 + 5t_3 \\ y = -7 + 9t_3 \quad (t_3 \in R) \\ z = t_3 \end{cases}$$

Bài 116. Cho 2 đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 8 + t \\ y = 5 + 2t \, (t \in R) \\ z = 8 - t \end{cases}$; $d_2 : \frac{3-x}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

a. Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung cả d_1 và d_2.

Bài 117. Cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}$

và mặt phẳng (α): $2x + y + z - 8 = 0$.

Lập phương trình hình chiếu d' của d trên mặt phẳng (α)

Bài 118. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$d_1 : \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{11}{3} + t \\ z = t \end{cases} (t \in R); (P) : x = 3y + z - 1 = 0$$

a. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P)

b. Viết phương trình đường thẳng d_1 là hình chiếu song song của d trên mặt phẳng (P) theo phương 0z

c. Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua gốc toạ độ O, d_2 cắt d và d_2 song song với mặt phẳng (P)

Bài 119. Cho mặt phẳng (α): $2x + y + z - 1 = 0$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$. Gọi M là giao điểm của d và (α). Hãy viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và Δ vuông góc với d và Δ nằm trong (α).

Bài 120. Trong không gian với hệ trục 0xyz cho điểm A(–4;–2;4) và đường thẳng $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad (t \in R)$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

(Đề thi đại học B – 2004)

Bài 121. Trong không gian với hệ trục 0xyz cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P) $2x + y - 2z + 9 = 0$

Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) biết (Δ) đi qua A và Δ vuông góc với d

(Đề thi đại học 2005 – A)

Bài 122. Trong không gian với hệ trục toạ độ 0xyz, cho điểm A(1;2;3) và 2 đường thẳng d : $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$, $d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và Δ cắt d_2.

(Đề thi đại học 2006 – D).

Bài 123. Trong không gian với hệ trục 0xyz, cho hai điểm A(1;4;2) và B(–1;2;4) và đường thẳng Δ : $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB)

(Đề thi đại học khối D – 2007)

Bài 124. Trong không gian với hệ trục 0xyz cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \quad \text{và } d_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \qquad t \in R \\ z = 3 \end{cases}$$

d. Chứng minh d_1 chéo d_2.

b. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): $7x + y - 4z = 0$ và d cắt hai đường thẳng d_1 và d_2.

(Đề thi đại học A–2007)

Bài 125. Trong không gian với hệ trục 0xyz cho đường thẳng Δ: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 3z + 4 = 0$

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ

(Đề thi đại học 2009 – D)

Hướng dẫn giải bài tập từ bài 95 đến bài 120
Phương trình đường thẳng

Bài 95. VTCP của đường thẳng d_1 là $\vec{a} = (2;1;3)$, VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1;-1;-1)$. Tính $\left[\vec{a}.\vec{n}\right] = (2,5,-3) = \vec{u}$. Vì đường thẳng d song song với (P) và d $\perp d_1$ nên VTCP của d là $\vec{n}$ thì $\vec{u} \perp \vec{n}$, $\vec{u} \perp \vec{a}$ chọn 1 VTCP của d là $\vec{u} = (2;5;-3)$ và d đi qua A (1;1;–2)

Vậy d có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$

Bài 96. Tính trọng tâm của ΔABC: $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};0\right)$, $d \perp (ABC)$ nên d nhận VTPT của mặt phẳng (ABC) làm VTCP

+ Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, VTPT của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (5;-4;3)$

+ Chọn 1 VTCP của d là $\vec{u} = (5;-4;3)$

– Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + 5t \\ y = -\frac{1}{3} - 4t \quad (t \in R) \\ z = 3t \end{cases}$

Bài 97. Tìm $A = d_1 \cap (P)$ được A(1;0;0)

– Tìm $B = d_2 \cap (P)$ được B(5;−2;1)

– Lập $\overrightarrow{AB} = (4;-2;1)$

– Đường thẳng d qua AB là đường thẳng d phải lập có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2t \quad (t \in R) \\ z = t \end{cases}$

Bài 98. Phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \quad (t \in R) \\ z = -1 + 5t \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc đi qua A, B

Bài 99. Phương trình (d): $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+5}{3}$

Bài 100. Phương trình chính tắc của d: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{-5}$

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \quad (t \in R) \\ z = -2 - 5t \end{cases}$

Bài 101. Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 5 \end{cases}$

Bài 102.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và $(P)\perp d'$

– Tìm $N = d' \cap (P)$

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm M, N

Phương trình (d): $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -1 \qquad (t \in R) \\ z = t \end{cases}$

Bài 103.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và $(P)\perp d_1$

– Tìm điểm $N = d_2 \cap (P)$

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm M, N

Phương trình đường thẳng d có dạng: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}$

Chứng minh:

– d đi qua $N \in d_2$ nên d cắt d_2

– d đi qua M

– d có hai điểm M, $N \in (P)$ nên $d \subset P$ mà $d_1 \perp (P)$ nên $d \perp d_1$

Bài 104. VTCP của 0z là $\vec{k} = (0;0;1)$

Có thể lập d theo 3 cách của loại 2 bài toán 4

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \quad (t \in R) \\ z = t \end{cases}$

Bài 105. Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = -3 \\ y = t \quad (t \in R) \\ z = 6 \end{cases}$

Bài 106. Phương trình đường thẳng d: $\frac{x + \frac{5}{3}}{-4} = \frac{y - \frac{5}{3}}{1} = \frac{z}{3}$

Bài 107. d: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3t \qquad (t \in R) \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

Bài 108. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$

Bài 109. $\begin{cases} x = 2 \\ y = t - 1 \ (t \in R) \\ z = t \end{cases}$

Bài 110: Phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x + 16}{5} = \dfrac{y - 11}{-4} = \dfrac{z}{1}$

Bài 111. Phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x - 2}{7} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z + 1}{-4}$

Bài 112: $\dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y + 2}{-6} = \dfrac{z + 4}{9}$

Bài 113: a. Hình chiếu d_1 và d lên mặt phẳng x0y

$$\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 1 \quad (t \in R) \\ z = 0 \end{cases}$$

b. Phương trình hình chiếu d_2 của d lên mặt phẳng (x0z) $\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 0 \qquad\quad (t \in R) \\ z = t \end{cases}$

c. Phương trình hình chiếu d_3 của d lên mặt phẳng (y0z)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3t - 1 \ (t \in R) \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Bài 114. d: $\dfrac{x - 23}{7} = \dfrac{y + 15}{7} = \dfrac{z}{-1}$

Bài 115. Đường thẳng phải lập có phương trình $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \ (t \in R) \\ z = 2 - t \end{cases}$

Bài 116.

a. Độc giả tự chứng minh d_1 chéo d_2

b. Đường vuông góc của d_1 và d_2 có phương trình $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 1}{4}$

Bài 117. Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (α) có dạng:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} + 2t \\ y = -t \quad (t \in R) \\ z = \dfrac{8}{3} - 3t \end{cases}$$

Bài 118.

a. Phương trình đường thẳng d': $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{3}t \quad (t \in R) \\ z = t \end{cases}$

b. Phương trình đường thẳng d_1: $\begin{cases} x = \dfrac{13}{3} + t \\ y = t \qquad\qquad (t \in R) \\ z = -\dfrac{10}{3} + 2t \end{cases}$

c. d_2: $\dfrac{x}{37} = \dfrac{y}{27} = \dfrac{z}{35}$

Bài 119.

– Gọi M là giao điểm của d và (α): $M\left(2; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{2}\right)$

– VTPT của (α) là $\vec{n} = (2;1;1)$, VTCP của d là $\vec{a} = (2;1;-3)$

Tính $[\vec{n};\vec{a}] = (-4;8;0)$ chọn $\vec{u} = -\dfrac{1}{4}\left[\vec{n},\vec{a}\right] = (1;-2;0)$

Chọn $\vec{u}$ là 1 VTCP của Δ

Phương trình tham số Δ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \dfrac{1}{2} - 2t \quad (t \in R) \\ z = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$

Bài 120.

Cách 1: Đường thẳng d có 1 VTCP là $\vec{v} = (2;-1;4)$ lấy điểm B chạy trên đường thẳng d, $B(-3+2t; 1-t; -1+4t)$ (với $t \in R$)

– Tính $\overrightarrow{AB} = (1+2t; 3-t; -5+4t)$

– Tìm điểm B để $AB \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{v} = 0$

Khi và chỉ khi $2(1+2t) - (3-t) + 4(-5+4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Ta được $\overrightarrow{AB} = (3;2;-1)$

– Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{x-4}{-1}$

– Chứng minh: theo cách lập:

+ Δ qua A

+ Δ qua B thuộc d nên Δ cắt d

+ $\overrightarrow{AB}.\vec{v} = 0$ nên $\Delta \perp d$

Cách 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và (P) vuông góc với d nên (P) nhận 1 VTCP của d làm VTPT

Phương trình mặt phẳng (P): $2(x + 4) - 1(y + 2) + 4(z - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 4z - 10 = 0$$

– Tìm điểm $B = d \cap (P)$ tìm được điểm B (3;2;–1) (ứng với t = 1)

– Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm AB cũng được phương trình Δ: $\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$

Cách 3:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và $(P) \perp d$

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và đường thẳng d

– $(P) \cap (Q) = \Delta$ thì Δ qua Δ cắt d và vuông góc với d

Phương trình mặt phẳng (P): $2x - y + 4z - 10 = 0$

Phương trình mặt phẳng (Q): $x - 2y - z + 4 = 0$

$(P) \cap (Q)$ thao giao tuyến Δ: $\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 2t - 2 \quad (t \in R) \\ z = 4 - t \end{cases}$

Bài 121.

Cách 1:

– Tìm giao điểm A của d với (P): (ứng với t = 1) được điểm A(0;–1;4)

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và $(Q) \perp d$

Phương trình mặt phẳng (Q): $-x + 2y + z - 2 = 0$

– (P) và (Q) có 1 điểm chung là A nên (P) cắt (Q) theo giao tuyến Δ.

Có phương trình tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \quad (t \in R) \\ z = 4 + t \end{cases}$

Cách 2: d có 1 VTCP là $\vec{a} = (-1;2;1)$, (P) có VTPT là $\vec{n} = (2;1;-2)$ vì đường thẳng Δ nằm trong (P), Δ vuông góc với d nên Δ có VTCP: $\vec{U} = \frac{1}{5}[\vec{n}, \vec{a}] = (1;0;1)$.

Vậy phương trình tham số của Δ có dạng: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \quad (t \in R) \\ z = 4 + t \end{cases}$

Bài 122.

– Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và (α) vuông góc d_1

Phương trình mặt phẳng (α): $2x - y + z - 3 = 0$

– Tìm toạ độ điểm $B = d_2 \cap (\alpha)$ ta được $B(2;-1;-2)$

– Lập phương trình đường thẳng Δ qua A, B

$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

– Chứng minh: Theo cách lập:

+ Δ đi qua A

+ Δ qua B thuộc d_2 nên $\Delta \cap d_2$

+ A, B $\in (\alpha)$ nên $\Delta \perp d_1$

Bài 123.

– Tìm trọng tâm G của Δ OAB: G(0;2;2)

– $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ là cặp VTCP của mặt phẳng (OAB)

Tính $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (12;-6;6)$

Chọn $\vec{n} = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (2;-1;1)$ làm 1 VTPT của mặt phẳng (α), vì $d \perp (OAB)$ nên $\vec{n}$ cũng là 1 VTCP của d

– Phương trình tham số đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \quad (t \in R) \\ z = 2 + t \end{cases}$

Bài 124.

a. Chứng minh d_1 chéo d_2

– Gọi $\vec{a}$ là 1 VTCP của d_1: $\vec{a} = (2;-1;1)$ và d_1 qua điểm A(0;1;–2)

– 1 VTCP của d_2 là $\vec{b} = (2;1;0)$ và d_2 đi qua điểm B(–1;1;3)

– Tính $[\vec{a},\vec{b}] = (-1;2;4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1;0;5)$

Tính $[\vec{a},\vec{b}] = \overrightarrow{AB} = 21 \neq 0$ nên 3 véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}, \overrightarrow{AB}$ không đồng phẳng nên d_1 chéo d_2

b. Lấy M đi động trên d_1:

Lấy điểm N di động trên d_2: $N(2t_2 - 1, t_2 + 1; 3)$

– Vì đường thẳng d vuông góc (P) và d cắt d_1 và d_2 nên d đi qua 2 điểm M, N và véc tơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{n} = (7;1;-4)$ là VTPT của (P)

Tức $\overrightarrow{MN} // \vec{n} \Leftrightarrow \dfrac{2t_2 - 2t_1 - 1}{7} = \dfrac{t_2 - t_1}{1} = \dfrac{5 - t_1}{-4}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} t_2 = -2 \\ t_1 = 1 \end{cases}$ được:

$\begin{matrix} M(2;0;-1) \in d_1 \\ N(-5,-1,3) \in d_2 \end{matrix}$ mà $MN \perp (P)$

Lập phương trình đường thẳng d đi qua M, N

d. $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{x+1}{-4}$

Bài 125. Tìm toạ độ giao điểm I của Δ và (P) ta được $I(-3;1;1)$,

1 VTPT của (P) là $\vec{n} = (1;2;-3)$, 1VTCP của Δ là $\vec{u} = (1;1;-1)$

Tính $[\vec{n},\vec{u}] = (1;-2;-1) = \vec{v}$

– Đường thẳng d nằm trong (P) d cắt và vuông góc Δ nên d đi qua điểm I và nhận $\vec{v}$ làm VTCP

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \ (t \in R) \\ z = 1 - t \end{cases}$

PHẦN IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG – MẶT PHẲNG

I. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

(1) Lý thuyết cho 2 mặt phẳng (P) và (Q)

(P): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ với $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$

(Q): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ với $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$

Giữa (P) và (Q) có 3 vị trí sau đây:

Trường hợp 1: $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

Trường hợp 2: $(P) // (Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

hoặc với $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ là 2 VTPT của (P) và (Q)

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2} \\ M \in (P) \\ M \notin (Q) \end{cases}$$

Trường hợp 3: (P) cắt (Q): $\left[\begin{array}{l} \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \\ \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2} \\ \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2} \end{array}\right.$ hoặc $[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] \neq \vec{0}$

2. Bài tập

Bài 1. Xét vị trí tương đối của các mặt phẳng cho bởi các phương trình sau đây:

a. $(P_1): 2x + 3y - 2z + 5 = 0$ $(Q_1): 3x + 4y - 8z - 5 = 0$

b. $(P_2): 3x - 4y + 3z + 6 = 0$ $(Q_2): 3x - 4y + 3z + 1 = 0$

c. $(P_3): 2x - 2y + 4z + 5 = 0$ $(Q_3): 5x - 5y - 10z + \dfrac{25}{2} = 0$

Bài giải

a. Vì $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{3}{4}$ nên (P_1) cắt (Q_1) theo giao tuyến là một đường thẳng

b. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = 1 \neq \dfrac{D_1}{D_2} = 6$ nên $(P_2) // (Q_2)$

c. Vì $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2} = \dfrac{2}{5}$ nên $(P_3) \equiv (Q_3)$

Bài 2. Cho 2 mặt phẳng

$(P): 3x - (m-3)y + 2z - 5 = 0$ và $(Q): (m-2)x - 2y + mz - 10 = 0$

Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) cắt nhau, song song nhau, trùng nhau.

Bài giải

a. $(P) // (Q) \Leftrightarrow \dfrac{3}{m+2} = \dfrac{m-3}{2} = \dfrac{2}{m} \neq \dfrac{1}{2}$

Hệ tương đương với hệ: $\begin{cases} (m+2)(m-3) = 6 \\ 3m = 2(m+2) \\ \dfrac{2}{m} \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 = 0 \\ m = 4 \\ m \neq 4 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm

Vậy không có giá trị nào của m để (P) // (Q)

b. $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \dfrac{3}{m+2} = \dfrac{m-3}{2} = \dfrac{2}{m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = 4$

Vậy m= 4 thì $(P) \equiv (Q)$

Bài 3. Cho 2 mặt phẳng (P) $2x + my + 2mz - 9 = 0$ và (Q): $6x - y - z - 10 = 0$

Hãy tìm những giá trị của tham số m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q)

Bài giải

Mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\vec{n}_1 = (2, m, 2m)$

Mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\vec{n}_2 = (6, -1, -1)$

Mặt phẳng (P) vuông góc mặt phẳng (Q) $\Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Bài 4. Cho 3 mặt phẳng (P): $3x - 7y + z - 3 = 0$

(Q): $x - 9y - 2z + 5 = 0$ và (R): $5x + \ell y + 4z + m = 0$

Hãy xác định l, m để 3 mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng.

Bài giải

2 mặt phẳng (P) và (Q) có $\dfrac{A_1}{A_2} = 3 \neq \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{7}{9}$ nên (P) cắt (Q) theo giao tuyến d. $\begin{cases} 3x - 7 + z - 3 = 0 \\ x - 9y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

Để 3 mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua 1 đường thẳng thì mặt phẳng (R) phải chứa đường thẳng d chỉ cần (R) đi qua 2 điểm của d là được.

Có thể chuyển d về tham số để lấy hai điểm A, B trên đường thẳng d: $A\left(\frac{1}{7};0;\frac{18}{7}\right)$ và $B(-13;-4;14)$ cho (R) đi qua hai điểm A, B ta được hệ phương trình: $\begin{cases}-65-4\ell+56+m=0\\ \frac{5}{7}+\frac{72}{7}+m=0\end{cases} \neq \begin{cases}m=-11\\ \ell=5\end{cases}$

II. Vị trí tương đối của đường thẳng Δ với mặt phẳng (P)

1. Lý thuyết

Cho mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$

Với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ (P) có 1 VTPT là $\vec{n} = (A;B;C)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và 1 VTCP là $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \neq \vec{0}$ giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) có 3 vị trí.

a. Cách nhận biết

+ Đường thẳng Δ cắt (P) tại 1 điểm duy nhất khi và chỉ khi $\vec{a}.\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow a_1A + a_2B + a_3C \neq 0$

+ Đường thẳng $\Delta//(P) \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}.\vec{a} = 0\\ M \notin (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1A + a_2B + a_3C = 0\\ x_0A + y_0B + z_0C + D \neq 0\end{cases}$

+ $\Delta \subset (P) \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}.\vec{a} = 0\\ M \in (P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1A + a_2B + a_3C = 0\\ x_0A + y_0B + z_0C + D = 0\end{cases}$

b. Tìm giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (P) Cho đường thẳng $\Delta\begin{cases}x = x_0 + a_1t \ (1)\\ y = y_0 + a_2t \ (2)\\ z = z_0 + a_3t \ (3)\end{cases}$ và mặt phẳng (P) $Ax + By + Cz + D = 0$ (4)

Toạ độ giao điểm A của Δ và (P) là nghiệm của hệ phương trình (1), (2), (3), (4). Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta được các trường hợp.

Trường hợp 1: Hệ có 1 nghiệm duy nhất t_0, thay $t = t_0$ vào (1), (2), (3) ta được toạ độ điểm A. Trường hợp này Δ cắt (P) tại một điểm A duy nhất.

Trường hợp 2: Hệ (1), (2), (3), (4) vô nghiệm tức là Δ và (P) không có điểm chung. Vậy Δ // P.

Trường hợp 3: Hệ (1), (2), (3), (4) có vô số nghiệm, tức Δ và (P) có vô số điểm chung đường thẳng Δ nằm trong mp (P) $\Delta \subset (P)$.

Chú ý: Khi chứng minh đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) có thể lấy trên đường thẳng Δ hai điểm A, B bất kỳ và chứng minh A, B nằm trong mặt phẳng (P)

– Đường thẳng $\Delta \perp (P) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương tức là

hoặc $\frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}$ hoặc $[\vec{a},\vec{n}] = \vec{0}$

2. Bài tập

Bài 5. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$ với các mặt phẳng cho bởi các phương trình:

(P_1) $x + y + z + 2 = 0$; (P_2): $4x + 8y + 2z - 7 = 0$

(P_3): $x - y + 2z + 5 = 0$; (P_4): $2x - 2y + 4z - 10 = 0$

Bài giải

VTCP của đường thẳng d là $\vec{a} = (2; 4; 1)$, các mặt phẳng P_1, P_2, P_3, P_4 lần lượt có PVT là $\vec{n_1} = (1; 1; 1); \vec{n_2} = (2; 4; 1); \vec{n_3} = (1; -1; 2); \vec{n_4} = (1, -1, 2)$

$M(1;2;3) \in d$. Ta có

a. $\vec{a}.\vec{n_1} = 2 + 4 + 1 = 7 \neq 0$. Vậy d cắt (P_1)

b. Vì $\vec{n_2} = 2.\vec{a}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{n_2}$ cùng phương vậy d vuông góc (P_2)

c. $\vec{n_3}.\vec{a} = 2 - 4 + 2 = 0$ thay toạ độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P_3)ta được: $1 - 2 + 2.3 = 5 \neq 0$

Tức $M \notin (P_3)$ nên đường thẳng d song song với (P_3).

d. $\vec{n}.\vec{a} = 0$ và $M \in (P_4)$ nên đường thẳng d nằm trong mp (P_4).

Bài 6. Tìm giao điểm của đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ với mặt phẳng (P): $x + 2y + z - 1 = 0$

Bài giải:

Toạ độ giao điểm d với (P) là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = -1 + t & (2) \\ z = t & (3) \\ x + 2y + z - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Giải hệ (1), (2), (3), (4), bằng cách thế (1), (2), (3) vào (4). Giải phương trình ta được $t = \frac{2}{3}$. Thay $t = \frac{2}{3}$ vào (1), (2), (3) ta được $\begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$

Vậy đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm M duy nhất $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

ài 7. Chứng tỏ rằng đường thẳng d $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 4 + 9t \quad t \in R \\ z = 1 + t \end{cases}$ nằm trong mặt phẳng (P): $4x - 3y + 7z - 7 = 0$

Bài giải

ách 1: Toạ độ giao điểm d với (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3 + 5t & (1) \\ y = 4 + 9t & (2) \\ z = 1 + t & (3) \\ 4x - 3y + 7z - 7 = 0 & (4) \end{cases}$$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) bằng cách thế (1), (2), (3) vào (4) ta được phương trình:

$$12 + 20t - 12 - 27t + 7 + 7t - 7 = 0$$

Nghiệm đúng với mọi t

Vậy hệ 1, 2, 3, 4 nghiệm đúng với mọi t. Hệ có vô số nghiệm. Tức là đường thẳng d và mặt phẳng (P) có vô số điểm chung. Vậy đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P)

ách 2: Trên đường thẳng d lấy 2 điểm A, B tuỳ ý

Chẳng hạn $A(3;4;1)$ và $B(-2;-5;0)$

Thay toạ độ điểm A và toạ độ điểm B vào phương trình mặt phẳng (P) đều thoả mãn. Nghĩa là đường thẳng d có 2 điểm A, B nằm trong mặt phẳng (P) nên d nằm trong mặt phẳng (P)

ách 3: VTCP của đường thẳng d là $\vec{a} = (5;9;1)$ VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (4;-3;7)$ ta có $\vec{a}.\vec{n} = 0$ và điểm $A(3;4;1) \in (P)$. Vậy đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P)

ài 8. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ 0xyz cho đường thẳng $d_k: \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0\,(P_1) \\ kx - y + z + 1 = 0\,(P_2) \end{cases}$ Tìm k để đường thẳng d_k vuông góc với mặt phẳng (P): $x - y - 2z + 5 = 0$

(Đề thi đại học 2003 – D)

Bài giải

VTPT của (P1) là $\vec{n_1} = (1;3k;-1)$

VTPT của (P2) là $\vec{n_2} = (k;-1;1)$

Ta có: $\vec{u} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (3k - 1; -k - 1; -1 - 3k^2) \neq \vec{0}\ \forall k$ là VTCP của đường thẳng d_k, VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1;-1;-2)$

$$d_k \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} // \vec{n} \Leftrightarrow \frac{3k-1}{1} = \frac{-k-1}{-1} = \frac{-1-3k^2}{-2}$$

Giải hệ phương trình ta được $k = 1$.

Bài 9. Trong không gian với hệ trục 0xyz cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng dm có phương trình

$$\begin{cases}(2m+1) + x + (1-m)y + m - 1 = 0 & (P_1)\\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 & (P_2)\end{cases} \text{(m là tham số)}$$

Xác định m để đường thẳng dm song song với mặt phẳng (P)

Bài giải

Cách 1: Mặt phẳng (P_1) có 1 VTPT là $\vec{n_1} = (2m+1; 0; 1-m)$

Mặt phẳng (P_2) có 1 VTPT là $\vec{n_2} = (m; 0; 2m+1)$

$\vec{n_1}, \vec{n_2} \neq 0\ \forall m$. Tính $\left[\vec{n_1}, \vec{n_2}\right] = \left[(1-m)(2m+1); -(2m+1)^2; -m(1-)\right]$

Gọi 1 VTCP của dm là $\vec{u} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}]$

1 VTCP của (P) là $\vec{n} = (2; -1; 0)$ đường thẳng dm//(P) $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n} = 0\,(1)\\ M \in dm, M \notin (P) \quad (2)\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ thay $m = -\dfrac{1}{2}$ vào dm ta được đường thẳng d $\begin{cases}y - 1 = 0\\ x = 0\end{cases}$

với mọi điểm M(0;1;a) với a thuộc R đều không nằm trên (P). Tức l

thoả mãn (2). Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$ thì dm//(P)

Cách 2: Chuyển dm về dạng tham số: $\begin{cases}x = (1-m)(2m+1)t \ (1)\\ y = 1 - (2m+1)^2 t \ (2)\\ z = -2 - m(1-m)t \ (3)\end{cases}$

PT mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ (4)

dm//(P) $\Leftrightarrow$ hệ 1, 2, 3, 4 vô nghiệm. Thế (1), (2), (3) vào (4) ta đượ phương trình $3(2m+1)t = -1$ (5)

Hệ (1), (2), (3), (4) vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (5) vô nghiệm

(5) vô nghiệm $\Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$

III. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

(1) Lý thuyết: Cho 2 đường thẳng d_1 và d_2.

Đường thẳng d_1 có 1 VTCP là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và d_1 đi qua điểm $M(x_1, y_1, z_1)$

Đường thẳng d_2 có 1 VTCP là $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và d_1 đi qua điểm $N(x_2, y_2, z_2)$

Lập $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

– Tính $[\vec{a}, \vec{b}]$ nếu $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, thì $\vec{a}$ & $\vec{b}$ cùng phương; $[\vec{a}.\vec{b}] \neq \vec{0}$: $\vec{a}$ & không cùng phương.

– Tính $[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{MN}$

a. Cách nhận biết vị trí tương đối giữa d_1 và d_2

Trường hợp thứ nhất: d_1 chéo d_2 $[\vec{a},\vec{b}]\overrightarrow{MN} \neq 0$

Trường hợp thứ hai: d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases}[\vec{a},\vec{b}]\overrightarrow{MN} = 0 \text{ không cùng phương} \\ \vec{a} \,\&\, \vec{b}\end{cases}$

Trường hợp thứ ba, $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0} \\ M \notin d_2\end{cases}$

(Hoặc $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}$ và $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ và $\overrightarrow{MN}$ không cùng phương)

Trường hợp thứ tư: $d_1 \equiv d_2 \begin{cases}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0} \\ M \in d_2\end{cases}$

(Hoặc $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}$ và $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ và $\overrightarrow{MN}$, $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$)

b. Tìm giao điểm của d_1 và d_2

Toạ độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình được tạo thành bởi phương trình của d_1 và d_2. Giải hệ phương trình đó ta được kết quả.

Trường hợp 1: Hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất ta kết luận được d_1 và cắt d_2 tại 1 điểm A duy nhất và tìm được toạ độ của điểm A.

Trường hợp 2: Hệ có vô số nghiệm tức là d_1 và d_2 có vô số điểm chung, kết luận được $d_1 \equiv d_2$.

Trường hợp 3: Hệ phương trình vô nghiệm sẽ xảy ra hai trường hợp sau:

+ Hoặc $d_1 // d_2$ phải có thêm điều kiện $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}$

+ Hoặc d_1 chéo d_2 phải có thêm điều kiện $[\vec{a},\vec{b}] \neq \vec{0}$

2. Bài tập

Bài 10. Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng sau đây:

a. $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ $\quad d_2 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{2}$

b. $\Delta_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \ (t \in R) \\ z = 2 - t \end{cases}$ $\quad \Delta_2 : \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 8 + 2t' \ (t' \in R) \\ z = 10 - 2t' \end{cases}$

c. $d : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$ $\quad d' : \begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$

d. $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 2 + 3t_1 \ (t \in R) \\ z = 3 + 4t_1 \end{cases}$ $\quad \Delta' : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z-7}{-4}$

Bài giải

a) d_1 có 1 VTCP là $\vec{a} = (1;2;3)$ và d_1 đi qua điểm M(1;1;–2); d_2 có 1 VTCP là $\vec{b} = (3;2;2)$ và d_2 đi qua điểm N(1;5;4) VTCP của MN là $\overrightarrow{MN} = (2;4;6)$

– Tính $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = (-2;7;-4), \left[\vec{a},\vec{b}\right]\overrightarrow{MN} = 0$

Vậy $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng, tức d_1 và d_2 đồng phẳng và có 2 VTCP của chúng không đồng phẳng, vậy d_1 cắt d_2

b) Δ_1 có 1 VTCP là $\vec{a} = (1;1;-1)$ và Δ_1 đi qua điểm M(0;1;2)

Δ_2 có 1 VTCP là $\vec{b} = (2;2;-2)$

Ta có $\vec{b} = 2\vec{a}$. Vậy $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thay toạ độ điểm M vào Δ_2 không thoả mãn $\Rightarrow$ $M \notin \Delta_2$. Do đó $\Delta_1 // \Delta_2$

c) d có 1 VTCP: $\vec{a} = (1;-3;2)$ và đi qua điểm M(0;0;–1)

d' có 1 VTCP là $\vec{b} = (0;0;1)$ và đi qua điểm N(0;9;0)

Tính $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{MN} = -9 \neq 0$. 3 véc tơ $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng, vậy d_1 chéo d_2

d) Δ có 1 VTCP là $\vec{a} = (1;3;4)$ và đi qua điểm M(1;2;3)

Δ' có 1 VTCP là $\vec{b} = (-1;-3;-4)$ đi qua điểm N(2;5;7)

Tính $\overrightarrow{MN} = (1;3;4)$

Ta được $\vec{a} = -1.\vec{b}$ nên $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương

$\overrightarrow{MN} = 1.\vec{a}$ nên $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{a}$ cùng phương

Vậy $d_1 \equiv d_2$

Bài 11. Cho đường thẳng dm: $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = m + 2t \\ z = 1 - m - 3t \end{cases}$ $(t \in R)$ $d'm \begin{cases} x = m - 2t' \\ y = mt' \\ z = 1 - m + t' \end{cases}$ $(t' \in R)$

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dm và d'm tuỳ theo các giá trị của tham số m

Bài giải

Đường thẳng dm có 1 VTCP là $\vec{u} = (m;2;-3) \neq 0$ và dm đi qua điểm M(1;m;1–m)

Đường thẳng d'm có 1 VTCP là $\vec{V} = (-2;m;1) \neq 0$ và d'm đi qua điểm N(m;0;1–m)

Lập véc tơ $\overrightarrow{MN} = (m-1;-m;0)$

Tính $[\vec{u},\vec{v}]\overrightarrow{MN} = 4m^2 - 7m - 2 = 4(m-2)\left(m + \frac{1}{4}\right)$

Trường hợp 1: Nếu $[\vec{u},\vec{v}]\overrightarrow{MN} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -\dfrac{1}{4} \end{cases}$ thì 3 VT $\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng, vậy d_1 chéo d_2

Trường hợp 2: $[\vec{u},\vec{v}]\overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Nếu m = 2 thì dm và d'm đồng phẳng

Khi đó $[\vec{u},\vec{v}] = (8;4;8) \neq 0$ nên $\vec{u}$ & $\vec{v}$ không cùng phương, vậy d_1 cắt d_2

khi $m = -\dfrac{1}{2}$ thì $[\vec{u},\vec{v}] = \left(\dfrac{5}{4};\dfrac{25}{4};\dfrac{65}{4}\right) \neq \vec{0}$ nên $\vec{u}$ & $\vec{v}$ không cùng phương d_1 cắt d_2. Do đó m= 2; $m = -\dfrac{1}{4}$ thì d_1 cắt d_2

Bài 12. Cho 2 đường thẳng $d_1 \begin{cases} x = 5 + t \\ y = at \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in R) \quad d_2 \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = a + 4t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases} \quad (t' \in R)$

(a là tham số)

Tìm những giá trị của a để d_1 chéo d_2, $d_1 // d_2$

Bài giải

Đường thẳng d_1 có 1 VTCP là $\vec{u} = (1;a;-1) \neq \vec{0}\, \forall a$ và d_1 đi qua điểm M(5;a;2). Đường thẳng d_2 có 1 VTCP là $\vec{v} = (1;2;-1) \neq 0$ và đi qua điểm N(1;a;2). Lập véc tơ $\overrightarrow{MN} = (-4;0;0)$

Ta có $[\vec{u},\vec{v}] = (2-a;0;2-a)$

$[\vec{u},\vec{v}]\overrightarrow{MN} = 4(2-a)$

d_1 chéo $d_2 \Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}]\overrightarrow{MN} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$

$d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ \& } \vec{v} & \text{cùng phương} \\ \vec{u} \text{ \& } \overrightarrow{MN} & \text{không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{v}] = \vec{0} \\ [\vec{u},\overrightarrow{MN}] \neq \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$

Khi a = 2 thì $d_1 // d_2$

$\forall a \neq 2$ thì d_1 chéo d_2 ta có $\vec{u}.\vec{v} = 2(1+a)$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow a = 1 \neq 2$. Khi a = –1 thì d_1 chéo d_2 và $d_1 \perp d_2$

Bài tập tự luyện tập của phần thứ tư

Bài 13. Cho hai mặt phẳng (P): x + 2y + 3z – 6 = 0 và mặt phẳng (Qm) có phương trình: (m+1)x + (m+2)y + (2m + 3)z – 4m – 6 = 0

Tìm những giá trị của m để (P) ≡ (Q), (P)⊥(Q)

Bài 14. Xác định m, n để hai mặt phẳng (P): $2x + my + 3z - 5 = 0$
(Q): $nx - 6y - 6z + 2 = 0$ song song với nhau

Bài 15. Cho đường thẳng dm $\begin{cases} x = mt \\ y = m + t \\ z = 1 - m + (1 - m^2)t \end{cases}$ $(t \in R)$

Và m là tham số. Tìm những giá trị của m để dm cắt mặt phẳng (xoy), dm thuộc (xoy), dm//(xoy).

Bài 16. Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$ và mặt phẳng (P) : $2x + z - 5 = 0$.

Tìm toạ độ giao điểm A của d và (P)

Bài 17. Cho mặt phẳng (P) có phương trình: $2x + my + z - 5 = 0$

và đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{11}{4} - t \quad (t \in R) \\ z = -\frac{3}{2} - t \end{cases}$

Tìm những giá trị của m để d song song với (P), d vuông góc với (P)

Bài 18. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d: $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$

và mặt phẳng (P): $4x - 3y + 7z - 7 = 0$

Bài 19. Cho đường thẳng dm $\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \end{cases}$

Tìm những giá trị của m để dm chéo với oz

Bài 20. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a. $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$ $d_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = 3t - 5 \\ z = 4 \end{cases}$ $t \in R$

b. $d_1 \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{-4}$ $d_2 : \frac{x-7}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{3}{4}$

c. $d_1 : \begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ $t \in R$

d. $d_1 : \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ x - 7y + 3z - 17 = 0 \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 4 - t \end{cases}$ $t \in R$

Bài 21. Cho 2 đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \ (t \in R) \text{ và } d_2: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ (a-1)y - 2z + 3 - a = 0 \end{cases}$$

Tìm a để d_1 song song với d_2

Bài 22. Cho 2 đường thẳng $d_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ và $d_2: \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = t' - 1 \\ z = t' + 3 \end{cases} \ (t \in R)$, tìm toạ độ giao điểm của d_1 và d_2

Hướng dẫn giải bài tập phần IV

Bài 13. a. $(P) \equiv (Q)$ khi $m = 1$ b. $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow m = -\dfrac{14}{9}$

Bài 14: $(P) // (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -4 \end{cases}$

Bài 15.

a) dm cắt mặt phẳng (x0y) tức là mặt phẳng $z = 0$
khi phương trình $1 - m + (1 - m^2)t = 0$ có nghiệm duy nhất
khi phương trình $\Leftrightarrow (1 - m^2)t = m - 1$ có nghiệm duy nhất
Khi $1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

b) dm nằm trong mặt phẳng x0y khi phương trình $z = 0$ nghiệm đúng với mọi t hay phương trình: $(1 - m^2)t = m - 1$ nghiệm đúng với mọi t khi $\begin{cases} 1 - m^2 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

c) dm song song với mặt phẳng x0y khi phương trình: $z = 0 \Leftrightarrow (1 - m^2)t = m - 1$ vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} 1 - m^2 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

Bài 16. $d \cap (P) = A(1; 2; 3)$

Bài 17. a. $d // (P)$ khi $m = 1$ b. $d \perp (P)$ khi $m \in \phi$

Bài 18. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) có thể giải hệ 3 phương trình có 3 ẩn x, y, z. Hoặc lấy 2 điểm A, B thuộc d và chứng minh $A, B \in (P)$

Bài 19. Với mọi giá trị của $m \in R$

Bài 20.

a. d_1 chéo d_2 b. d_1 song song với d_2

c. $d_1 \cap d_2 = A(0; 0; -3)$ d. $d_1 \cap d_2 = B$

Bài 21. $d_1 // d_2$ khi $a = 2$

Bài 22. $d_1 \cap d_2 = A(1; -1; 3)$

PHẦN V. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. Lý thuyết

1. Góc giữa 2 véc tơ.

Cho 2 véc tơ $\vec{a} = (a_1, a_2; a_3) \neq \vec{0}$ và $\vec{b} = (b_1, b_2; b_3) \neq \vec{0}$. Gọi α là góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{\left|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Điều kiện cần đủ để $\vec{a} \perp \vec{b}$ là $\vec{a}.\vec{b} = 0$

2. Góc giữa 2 đường thẳng

Trong không gian cho 2 đường thẳng d_1 và d_2; 1 VTCP của d_1 là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \neq 0$ và 1 VTCP của d_2 là $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \neq 0$.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 với $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{\left|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Nếu $\left[\begin{array}{l} d_1 \,//\, d_2 \\ d_1 \equiv d_2 \end{array}\right.$ thì $\alpha = 0^0$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

3. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Cho đường thẳng d có 1 VTCP là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \neq 0$ và mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$

Gọi α là góc giữa đường thẳng d với mặt phẳng (P); $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$.

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{\left|\vec{a}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|a_1A + a_2B + a_3C\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Nếu $\left[\begin{array}{l} d \,//(P) \\ d \subset (P) \end{array}\right.$ thì $\alpha = 0^0$

$d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương

4. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$

mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q); $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|} = \dfrac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_3C_3\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Điều kiện cần đủ để (P) và (Q) là $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$

Nếu $\left[\begin{array}{l}(P) // (Q) \\ (P) \equiv (Q)\end{array}\right.$ thì $\alpha = 0^0$

Chú ý: Khi tính các góc trong tam giác ABC có thể áp dụng định lý hàm số cô sin.

II. Bài tập

Bài 1. Cho hai đường thẳng $d_1 \begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad (t \in R) \quad d_2 \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$

Tính góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2

Bài giải

Đường thẳng d_1 có 1 VTCP là $\vec{a} = (9; 5; 1)$ và đi qua A(0;0;–3)

Đường thẳng d_2 có 1 VTCP là $\vec{b} = (-9; -5; -1)$

Ta có $\vec{a} = \vec{b}$ và điểm $A \in d_2$

Như vậy $d_1 \equiv d_2$ và góc giữa d_1 và d_2 bằng 0^0

Bài 2. Cho mặt phẳng (P) $x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng d: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$

Tính giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Bài giải

Đường thẳng d có 1 VTCP là $\vec{a} = (2; 1; 1)$, mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\vec{n} = (1; 2; -1)$, α là góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d

Ta được $\sin\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|} = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}.\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{2}$

Do α là góc nhọn nên $\alpha = 30^0$

Bài 3. Cho 2 mặt phẳng (P): $x + y + 2z + 4 = 0$

(Q): $2x + y + z + 1 = 0$

Tính góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q)

Bài giải

mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_1} = (1; 1; 2)$

mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_2} = (2; 1; 1)$

Gọi β là góc nhọn giữa (P) và (Q) $\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{5}{6}$

Vậy $\beta = \arccos\frac{5}{6}$

Bài 4. Cho 2 đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x - az - a - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$; $d_2 : \begin{cases} ax + 3y - a - 3 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

Tìm a để góc giữa d_1 và d_2 bằng 45^0

Bài giải

d_1 có 1 VTCP là $\vec{u} = (a; 0; 1) \neq \vec{0}$ với mọi giá trị của a

d_2 có 1 VTCP là $\vec{v} = (3; -a; 0) \neq \vec{0}$ với mọi a

Để góc giữa d_1 và d_2 bằng 45^0 ta phải có

$$\text{Cos}45^0 = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3|a|}{\sqrt{a^2+1}.\sqrt{a^2+9}}$$

$\Leftrightarrow 6|a| = \sqrt{2}.\sqrt{a^2+1}.\sqrt{a^2+9}$ vì 2 vế dương.

Bình phương 2 vế của phương trình rút gọn ta được phương trình:

$a^4 - 8a^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{7}}$

Bài 5. Cho mặt phẳng (P): bx + ay + bz .a–b = 0 với $a^2 + b^2 > 0$ mặt phẳng (Q): x + y – 7 = 0. Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q). Tìm giá trị nhỏ nhất của α

Bài giải

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n_1} = (b; a; b)$ với $a^2 + b^2 > 0$

Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n_2} = (1; 1; 0)$

α là góc nhọn giữa (P) và (Q). Ta được $\cos\alpha = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+2b^2}}$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}}$$

Trường hợp 1. Nếu b = 0 và a ≠0 thì $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

Trường hợp 2: với b ≠ 0, a ≠ 0 thì $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{(a+b)^2}{(a^2+2b^2)}$

Đặt a = bt ≠ 0 ta được $\cos^2\alpha = \dfrac{t^2+2t+1}{2(t^2+2)}$ với t∈R

Đặt $f(t) = \dfrac{t^2+2t+1}{2(t^2+2)}$ với f(t) liên tục trong R

$$f(t) = \frac{-2t^2+2t+4}{2(t^2+2)^4} = \frac{-t^2+t+2}{(t^2+2)^4}$$

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2+t+2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của f(t) trong R

t	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'(t)		−	0	+	0	−	
f(t)	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$\frac{3}{4}$	↘	$\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \frac{1}{2}$

t= −1 hàm số đạt cực tiểu $f_{CT} = 0$

t = 2 hàm số đạt cực đại $f_{CĐ} = -\frac{3}{4}$

Vậy $\min\limits_{R} f(t) = 0$ đạt được khi $t = -1$

Vậy $\max\limits_{R} f(t) = \frac{3}{4}$ đạt được khi t = 2

Tức là $\cos^2\alpha \le \frac{3}{4}$ do $\cos\alpha > 0$ nên $\cos\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Do α nhọn và hàm số cô sin là nghịch biến nên $\alpha \ge 30^0$

Vậy $\text{Min}\alpha = 30^0$ đạt được khi $a = 2b \neq 0$. Chọn b = 1 thì a = 2

Bài 6. Cho điểm I (0;0;1) và K(3;0;0). Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm I, K và (P) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 30^0

Bài giải

Gọi mặt phẳng (P) $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ lần lượt cho (P) đi qua I và K ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ 3A + D = 0 \\ D \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -D \\ A = -\dfrac{D}{3} \\ (D \neq 0) \end{cases}$$

Thay A, C vào (P) ta được mặt phẳng (P) có phương trình:

$$-\frac{D}{3}x + By - Dz + D = 0$$

Do D # 0 nên (P) có dạng: $x - 3\frac{B}{D}y + 3z - 3 = 0$

(P) có 1 PVT là $\vec{n} = \left(1; -3\frac{B}{D}; 3\right) \neq 0$

Mặt phẳng (xOy) có VTPT là $\vec{k} = (0;0;1)$ tìm mặt phẳng (P) để (P) tạo với (xOy) một góc 30^0 ta phải có

$$\cos 30^0 = \frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\sqrt{1 + 9\frac{B^2}{D^2} + 9}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{10 + 9\frac{B^2}{D^2}} \Leftrightarrow 3\left(10 + 9\frac{B^2}{D^2}\right) = 36$$

$$\text{Do } D \neq 0 \Leftrightarrow 9\frac{B^2}{D^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\frac{B}{D} = \sqrt{2} \\ 3\frac{B}{D} = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ta được 2 mặt phẳng (P) có phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x - \sqrt{2}y + 3z - 3 = 0 \\ x + \sqrt{2}y + 3z - 3 = 0 \end{array}\right.$

Bài 7. Trong không gian với hệ trục oxyz, cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1). Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc α mà $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

(Đề thi đại học 2006 – A)

Bài giải

Gọi mặt phẳng (Q): $ax + by + cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$

Vì (Q) chứa A'(0;0;1) và C(1;1;0)

nên ta được hệ phương trình $\begin{cases} c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = -d = a + b$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax + by + (a + b)z - (a + b) = 0$

mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\vec{n} = (a; b; a + b)$

VTPT của mặt phẳng (ABCD) cũng là mặt phẳng (Oxy) là:

$\overline{AA'} = k = (0;0;1)$

Là góc giữa (Q) và mặt phẳng (Oxy). Theo gt $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\text{Ta được } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a + b)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 6(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2 + ab) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2b \neq 0 \\ b = -2a \neq 0 \end{array}\right.$$

Với $a = -2b$ chọn $b = -1$ được $a = 2$ ta được phương trình mặt phẳng (Q): $2x - y + z - 1 = 0$

$b = -2a$ chọn $a = 1$ ta được mặt phẳng (Q): $x - 2y - z + 1 = 0$

Bài 8. Trong không gian với hệ tục toạ độ oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D có A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b) (a, b > 0). Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để mặt phẳng (A'BD) vuông góc với mặt phẳng (MBC) với M là trung điểm của cạnh CC'

(Đề thi đại học: 2003 – A)

Bài giải

Điểm C có toạ độ C(a;0;0), C'(a;a;b)

M là trung điểm của CC': M(a;a; $\frac{b}{2}$)

Mặt phẳng (BDM) nhận 2 véc tơ: $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BM}$ làm cặp VTCP nên nhận $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = (\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; a^2)$ làm 1 VTPT

Mặt phẳng (A'BD) nhận 2 véc tơ: $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BA}'$ làm cặp VTCP nên nhận $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}'\right] = (ab; ab; a^2)$ làm 1 VTPT

Do đó mặt phẳng (BDM) ⊥mặt phẳng (A'BD)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$

Bài 9. Cho 2 mặt phẳng (P): x + 2y – z + 2 = 0 và mặt phẳng (Q): x – my + (m + 1)z + m – 2 = 0. Tìm giá trị của m để mặt phẳng (P) hợp với mặt phẳng (Q) một góc 60^0

Bài giải

Mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_1} = (1; 2; -1)$

Mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_2} = (1; -m; m + 1)$

Để (P) hợp với (Q) 1 góc 60^0 thì $\cos 60^0 = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-3m|}{\sqrt{6}\sqrt{2m^2 + 2m + 2}} \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy để (P) hợp với (Q) góc 60^0 thì m = 1 và $m = -\frac{1}{2}$

Bài 10. Trong không gian Oxyz cho điểm A(1;2;–1), B(–1;1;1), C(1;0;1). Tính góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (Oxy)

Bài giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (0; -2; 2)$. Ta có: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2; 4; 4)$

Mặt phẳng (ABC) nhận $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ làm cặp VTCP nên (ABC) nhận $\vec{u} = (1;2;2)$ làm 1 VTPT, mặt phẳng (oxy) có 1 VTPT là $\vec{k} = (0;0;1)$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (ABC) và (Oxy) ta được

$$\text{Cos}\varphi = \frac{|\vec{n}\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|} = \frac{2}{3}, \varphi = \arccos\frac{2}{3}$$

Bài tập tự luyện phần V

Bài 11. Cho 2 đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$

$$d_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in R)$$

Xác định cosin của góc giữa d_1 và d_2

Bài 12. Tính cosin của góc giữa 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2t_1 + 1 \\ y = t_1 + 2 \\ z = 3t_1 - 3 \end{cases} (t_1 \in R) \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2 + t_2 \\ y = 2t_2 - 3 \\ z = 3t_2 + 1 \end{cases} (t_2 \in R)$$

Bài 13. Xác định góc giữa đường thẳng d: $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 5 = 0$

Bài 14. Tính góc giữa 2 mặt phẳng

(P_1): $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$

(P_2): $x + \sqrt{2}y - z - 1 = 0$

Bài 15. Cho Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng

(P): $mx + y - mz - 1 = 0$

(Q): $x - my + z - m = 0$

Chứng minh góc giữa Δ_m và Oz không đổi

Bài 16. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD và A'D'. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C'N và góc giữa 2 mặt phẳng (PAI) và (DCC'D')

Bài 17. Tính góc giữa đường thẳng $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ với mỗi trục toạ độ

Bài 18. Cho hình chóp SABCD đáy là hình vuông cạnh a cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Tính cosin của góc hợp bởi 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC).

Bài 19. Tính góc giữa hai đường thẳng

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} (t \in R) \quad d_2 : \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = -1 + 3t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases}$$

Bài 20. Tính góc giữa đường thẳng $\Delta : \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ với mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 5 = 0$

Hướng dẫn giải bài tập tự luyện phần V

Bài 11. $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{151}}$

Bài 12. $\cos\alpha = \frac{13}{14}$

Bài 13. $\alpha = 30^0$

Bài 14. $\alpha = 60^0$

Bài 15. Tính góc giữa Δm và Oz bằng α: $\alpha = 45^0$ không đổi

Bài 16. Đặt hình lập phương vào hệ trục Oxyz

a. MP⊥ NC' góc MP và NC' bằng 90^0

b. φ là góc giữa 2 mặt phẳng (PAI) và (DCC'D')

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}$$

Bài 17. Côsin của góc giữa đường thẳng đã cho với các trục toạ độ lần lượt là: $\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}$

Bài 18. Côsin của góc giữa (SCD) và (SBC) bằng $\frac{1}{5}$

Bài 19. $\cos\varphi = \frac{3\sqrt{6}}{14}$

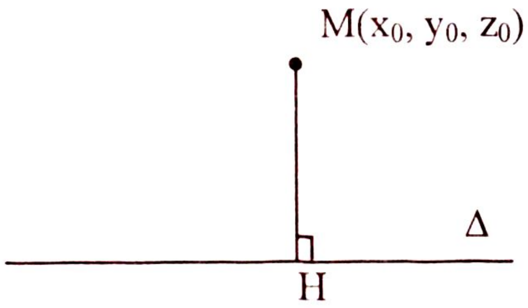
Bài 20. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$

PHẦN VI. KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1

1. Khoảng cách từ điểm M $(x_0; y_0; z_0)$ đến đường thẳng Δ

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và đường thẳng Δ gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ. Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ kí hiệu $d(M, \Delta) = MH$. MH là đoạn thẳng ngắn nhất trong tất cả các đoạn thẳng nối M với 1 điểm bất kỳ trên đường Δ. Nếu $M \in \Delta$ thì $d(M, \Delta) = 0$.



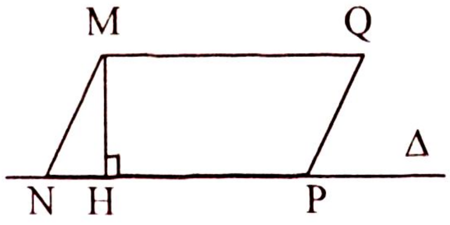
Sau đây là các phương pháp tính MH, tìm điểm H

Phương pháp 1: Trên Δ lấy điểm N

– Dựng hình bình hành MNPQ như hình 19. Với $MQ = NP = |\vec{a}|$

Vậy:

$$\boxed{d(M, \Delta) = MH = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|} \text{ (đvdt)}}$$



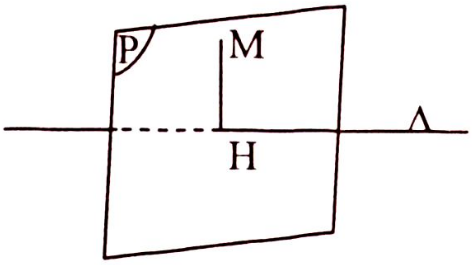
Hình 19

Phương pháp 2: (Hình 20)

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và $(P) \perp \Delta$ nên mặt phẳng (P) nên véc tơ chỉ phương của Δ làm 1 véc tơ pháp tuyến

– Tìm điểm $H = \Delta \cap (P)$

– $d(M, \Delta) = MH$



Hình 20

Phương pháp 3: Viết phương trình tham số của Δ, trên Δ lấy điểm N di động (phụ thuộc vào t).

– Tính độ dài MN: $MN^2 = f(t)$ là hàm số của t

– Tìm t để f(t) nhỏ nhất (có thể khảo sát hàm số hoặc dùng phương pháp đồ thị...) khi f(t) nhỏ nhất thì $N \equiv H$ là hình chiếu của M trên Δ

$d(M, \Delta) = \sqrt{\min f(t)} = \sqrt{\min MN^2}$

Phương pháp 4: Làm các bước 1, 2 của phương pháp 3.

– Tính $\overrightarrow{MN}$

– Tìm điểm N để $MN \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{a} = 0$

Giải phương trình tìm t ta được $N \equiv H$. Vậy $d(M, \Delta) = MH$

2. Tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua đường thẳng Δ

M' đối xứng với M qua Δ thì điểm H: là hình chiếu của M trên Δ là trung điểm đoạn MM'. Vậy muốn tìm điểm M' ta phải tìm điểm H (phương pháp 2, 3, 4 của mục 1 bài toán 1) và tọa độ điểm M' tính theo công thức:

$$x_{M'} = 2x_H - x_M,\ y_{M'} = 2y_H - y_M,\ z_{M'} = 2z_H - z_M$$

3. Tìm đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua đường Δ

– Trên đường thẳng Δ lấy 2 điểm A, B bất kỳ (cố định)

– Tìm điểm A' đối xứng A qua đường thẳng Δ, điểm B' đối xứng với B qua đường thẳng Δ.

– Lập phương trình đường thẳng d' đi qua 2 điểm A', B', d' là đường phải lập.

Bài tập áp dụng bài toán 1

Bài 1: Cho đường thẳng Δ $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 2t - 2 \\ z = -t \end{cases}$ (với $t \in R$) và điểm $M(4; -3; 2)$

a) Tìm khoảng cách từ M đến Δ

b) Tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua đường thẳng Δ

Bài giải

a) **Cách 1**: Đường thẳng Δ có VTCP: $\vec{a} = (3; 2; -1)$ và Δ đi qua điểm $N(-2; -2; 0)$

– Lập véc tơ $\overrightarrow{MN} = (6; -1; 2)$. Tính $\left[\vec{a}, \overrightarrow{MN}\right] = (3; -12; -15)$

– Áp dụng công thức tính khoảng cách từ M đến Δ ta được

$$d(M, \Delta) = \frac{\left|\left[\vec{a}, \overrightarrow{MN}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\sqrt{378}}{14} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Cách 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M, (P) ⊥ d như vậy mặt phẳng (P) nhận VTCP của Δ là $\vec{a} = (3; 2; -1)$ làm VTPT. Mặt phẳng (P) có phương trình:

$3(x - 4) + 2(y + 3) - 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - z - 4 = 0$

– Tìm điểm H là giao điểm của Δ với (P) tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

phương trình $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 2 \\ z = -t \\ 3x + 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ (ứng với $t = 1$)

Ta được điểm $H(1; 0; -1)$ là hình chiếu của M trên Δ

– Khoảng cách từ M đến Δ: $d(M, \Delta) = MH = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$

$d(M, \Delta) = 3\sqrt{3}$ (đơn vị độ dài)

Cách 3:

– Lấy điểm $N(3t - 2; 2t - 2; -t)$ di động trên Δ

– Tính $MN^2 = 14t^2 - 28t + 41 = 14(t - 1)^2 + 27 \geq 27\ \forall t \in R$

$\text{Minf}(t) = \text{Min}MN^2 = 27$, $\text{Min}MN = 3\sqrt{3}$ đạt được khi $t = 1$

(Khi $t = 1$ thì $N \equiv H(1; 0; -1)$ là hình chiếu của M trên Δ)

Vậy $d(M, \Delta) = 3\sqrt{3}$

Cách 4: Làm như cách 3

– Tính $\overrightarrow{MN} = (3t - 6; 2t + 1; -t - 2)$

– Tìm điểm N để $NM \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{a} = 0$. Giải phương trình này ta được $t = 1$

– Thay $t = 1$ vào tọa độ điểm N được $N \equiv H(1; 0; -1)$ là hình chiếu của M trên Δ.

– $d(M, \Delta) = MH = 3\sqrt{3}$

b) M' đối xứng với M qua Δ thì H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ là trung điểm của đoạn MM'

– Làm cách 2, cách 3, cách 4 của phần a ta được điểm $H(1; 0; -1)$

– Vậy tọa độ điểm M' là điểm đối xứng của M qua Δ

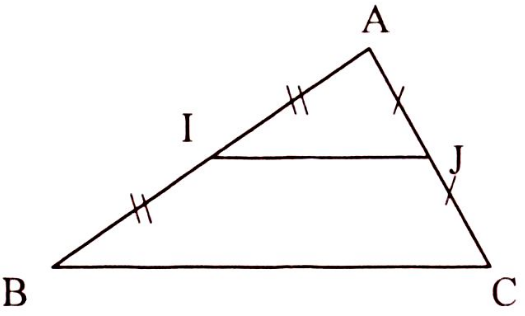
$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = -2 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = 3 \\ z_{M'} = 2z_H - z_M = -4 \end{cases}$ ta được $M'(-2; 3; -4)$

Bài 2: Cho 2 đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình

$$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-3} \quad \text{và } d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \quad (t \in R) \\ z = 4 + 5t \end{cases}$$

Gọi B, C lần lượt là các điểm đối xứng của điểm A(1; 0; 0) qua d_1 và d_2. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài giải (Hình 21)



Hình 21

Gọi I là hình chiếu của A trên d_1
J là hình chiếu của A trên d_2
B là điểm đối xứng của A qua d_1
C là điểm đối xứng của A qua d_2
Ta có AB = 2AI, AC = 2AJ nên diện tích ΔABC = 4 diện tích ΔAIJ
– Tìm điểm I
Có 3 cách tìm điểm I nêu ở bài toán 1, mục 1; ở đây ta làm theo cách 2
+ Dựng mặt phẳng (P) đi qua điểm A và (P) vuông góc với d_1
Phương trình mặt phẳng (P): $x - 2y - 3z - 1 = 0$
+ (P) ⊥ d_1 tại điểm I, tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = -3t' \\ x - 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được $I\left(-\frac{1}{14}; -\frac{6}{7}; \frac{3}{14}\right)$

– Tìm J: là hình chiếu vuông góc của điểm A trên d_2 làm tương tự như tìm điểm I ta được $J\left(-\frac{7}{10}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$

– Tìm diện tích của ΔAIJ:

$+ \overrightarrow{AI} = \left(-\frac{15}{4}; -\frac{6}{7}; \frac{3}{14}\right)$

+ $\overrightarrow{AJ} = \left(-\frac{17}{10}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$

+ $\left[\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}\right] = \left(\begin{vmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{3}{14} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{15}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{17}{10} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -\frac{15}{4} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{17}{10} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} \right) = \left(-\frac{12}{35}; \frac{423}{280}; \frac{3}{70}\right)$

+ Tìm diện tích $\Delta AIJ = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right]\right| = \frac{3\sqrt{41}}{35}$ (đvdt)

Vậy diện tích $\Delta ABC = \frac{3\sqrt{41}}{35}$ (đvdt)

Bài 3: Cho 2 đường thẳng d và d' có phương trình:

$$d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1} \quad \text{và } d_1: \begin{cases} x = t' \\ y = 4 - 2t' \quad (t' \in R) \\ z = 2t' - 3 \end{cases}$$

Lập phương trình đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d_1 qua đường thẳng d.

Bài giải

– Lấy 2 điểm A, B nằm trên đường thẳng d_1

– Tìm A_1 đối xứng với A qua d, B_1 đối xứng với B qua đường d

– Lập phương trình đường thẳng Δ qua 2 điểm A_1, B_1. Δ là đường phải lập

Cụ thể đối với bài 3:

+ Trên d_1 lấy 2 điểm A(1; 2; −1), B(2; 0; 1)

+ Tìm điểm A_1 đối xứng với điểm A qua đường thẳng d

Tìm được điểm H(0; 1; 0) là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d, A_1 đối xứng A qua d nên $A_1(-1; 0; 1)$

+ Tìm điểm B_1 đối xứng với điểm B qua đường thẳng d: $B_1(2; 0; 1)$

+ Đường thẳng Δ đối xứng với d_1 qua đường thẳng d thì Δ đi qua 2 điểm A_1 và B_1

Phương trình Δ: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 0 \qquad (t \in R) \\ z = 1 \end{cases}$

Bài 4: Cho 2 điểm A(1; 1; 0), B(3; −1; 4) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$. Tìm tọa độ của điểm M trên đường thẳng d sao cho tổng các độ dài MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài giải

– Trên đường thẳng d lấy điểm M di động M(t – 1; 1 – t; 2t – 2)

– Ta có MA + MB = $\sqrt{(t-2)^2+t^2+(2t-2)^2}+\sqrt{(t-4)^2+(2-t)^2+(2t-6)^2}$

$= \sqrt{6t^2-12t+8}+\sqrt{6t^2-36t+56}$

$= \sqrt{6\sqrt{(t-1)^2+2}+\sqrt{6(t-1)^2+2}}$

Xét các điểm $A_0(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; 0)$, $B_0(3; -\frac{1}{\sqrt{3}}; 0)$ và $I_0(t; 0; 0)$

Ta có $A_0I_0 + B_0I_0 = \sqrt{(t-1)^2+\frac{1}{3}}+\sqrt{(t-3)^2+\frac{1}{3}}$

Vậy MA + MB = $\sqrt{6}\,(A_0I_0 + B_0I_0)$

Do đó (MA + MB) đạt giá trị nhỏ nhất khi $A_0I_0 + B_0I_0$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi và chỉ khi A_0, I_0, B_0 thẳng hàng

Khi và chỉ khi $\overrightarrow{A_0I_0}$ và $\overrightarrow{B_0I_0}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{t-1}{t-3} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\Leftrightarrow$ t = 2 ta được M(1; –1; 2)

Do đó Min(MA + MB) = $4\sqrt{2}$ đạt được khi M(1; –1; 2)

Bài 5: Cho điểm A(9; 0; 9), B(12; –6; –3) và đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 9 - t \end{cases}$ (t ∈ R). Tìm điểm M ∈ (d) để |MA – MB| lớn nhất

Bài giải

– Lấy điểm M(t; t; 9 – t) với t ∈ R

– Ta được $|MA - MB| = \left|\sqrt{(t-9)^2+t^2+t^2}-\sqrt{(t-12)^2+(t+6)^2+(t-12)^2}\right|$

$= \sqrt{3}\left|\sqrt{(t-3)^2+18}-\sqrt{(t-6)^2+72}\right|$ (1)

– Xét các điểm $A_2(3; 3\sqrt{2}; 0)$, $B_2(6; 6\sqrt{2}; 0)$ và $I_2(t; 0; 0)$

– Ta có $|MA - MB| = \sqrt{3}\,|A_2I_2 + I_2B_2|$ (2)

– Đối chiếu (1) và (2) ta được |MA – MB| đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $|A_2I_2 - I_2B_2|$ lớn nhất. Do điểm A_2, B_2, I_2 cùng nằm trong mặt phẳng (xOy) nên $|A_2I_2 - I_2B_2|$ lớn nhất khi và chỉ khi 3 điểm A_2, B_2, I_2 thẳng hàng.

Khi 2 véc tơ $\overrightarrow{A_2I_2}$ và $\overrightarrow{B_2I_2}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{t-3}{t-6} = \frac{-3\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = 0$

Ta được M(0; 0; 9) thì |MA – MB| đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6: Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in R) \text{ và } \Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$$

Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1

(Đề thi Đại học ban D năm 2010)

Bài giải

– Lấy điểm M di động trên Δ_1: M(3 + t; t; t) ($t \in R$)

– Δ_2 đi qua điểm A(2; 1; 0) và Δ_2 có VTCP là $\vec{a} = (2; 1; 2)$

– Lập véc tơ $\overrightarrow{AM} = (t + 1; t - 1; t)$

– Tính $[\vec{a}, \overrightarrow{AM}] = (2 - t; 2; t - 3)$

– Tính $d(M, \Delta_2) = \dfrac{\left|[\vec{a}, \overrightarrow{AM}]\right|}{|\vec{a}|} = \dfrac{\sqrt{2t^2 - 10t + 17}}{3}$

– Tìm điểm M để $d(M, \Delta_2) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\sqrt{2t^2 - 10t + 17} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right.$ thay t tìm được vào tọa độ của điểm M. Ta được 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu của bài toán là M(4; 1; 1) hoặc M(7; 4; 4)

Bài 7: Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng Δ có phương trình: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM

(Đề thi Đại học Ban B – 2010)

Bài giải

– Đường thẳng Δ đi qua điểm A(0; 1; 0) và Δ có 1 VTCP là $\vec{u} = (2; 1; 2)$

– Gọi điểm $M \in Ox$ nên tọa độ của điểm M là (t; 0; 0)

– Lập véc tơ $\overrightarrow{AM} = (t; -1; 0)$

– Tính $[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = (2; 2t; -t - 2)$; $OM = |t|$

– Tính $d(M, \Delta) = \dfrac{\left|[\vec{u}, \overrightarrow{AM}]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{5t^2 + 4t + 8}}{3}$

– Tìm tọa độ điểm M để $d(M, \Delta) = OM$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5t^2 + 4t + 8}}{3} = |t| \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

– Thay t tìm được vào tọa độ điểm M ta được 2 điểm M phải tìm: M(–1; 0; 0) và M(2; 0; 0)

Bài 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ đề các vuông góc Oxyz cho 2 điểm A(2; 0; 0), B(0; 0; 8) và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

(Đề thi Đại học năm 2003 – Ban D)

Bài giải

– Từ giả thiết $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$ và A(2; 0; 0) suy ra C(2; 6; 0). I là trung điểm của BC: I(1; 3; 4)

– Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm I và (α) vuông góc với OA là $x - 1 = 0$

– Tọa độ giao điểm của OA với mặt phẳng (α) là điểm K(1; 0; 0)

– Khoảng cách từ I đến OA là $IK = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2}$

IK = 5 (Đơn vị độ dài)

Bài 9a: Cho điểm M(2; 1; 4) và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ (với $t \in R$).

Tìm điểm H thuộc đường thẳng Δ sao cho đoạn MH có độ dài nhỏ nhất.

(Đề thi Đại học Ban A – 2002)

Bài giải

Điểm H ≡ Δ để độ dài đoạn MH nhỏ nhất. Khi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên Δ. Để giải bài toán này có thể dùng 3 cách giải của bài toán 1 ở đây có thể dùng 2 cách giải sau:

Cách 1: Lấy điểm $H \in \Delta$; H(t + 1; t + 2; 2t + 1) với $t \in R$

$\overrightarrow{MH} = (t - 1; t + 1; 2t - 3)$

$MH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5}$

$MH \geq 5$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi t = 1

Thay t = 1 vào tọa độ điểm H(2; 3; 3)

Cách 2: Điểm $H \in \Delta_2$; H ta được H(1 + t; t + 2; 2t + 1)

MH nhỏ nhất khi và chỉ khi $MH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$ (1)

Trong đó: $\overrightarrow{MH} = (t - 1; t + 1; 2t - 3)$

$\vec{u} = (1; 1; 2)$ là 1 VTCP của Δ

Vậy (1) $\Leftrightarrow t - 1 + t + 1 + 4t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ thay t = 1 vào tọa độ điểm H ta được H(2; 3; 3)

Bài 9b: Cho điểm A(–3; 0; 1), B(1; –1; 3) và mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 5 = 0$

Trong các đường thẳng đi qua A song song với (P). Hãy viết phương trình đường thẳng Δ mà khoảng cách từ B đến đường thẳng Δ là nhỏ nhất.

(Đề thi Đại học B – 2009)

Bài giải

– Δ nằm trong mặt phẳng (Q): qua A và song song với (P)

Phương trình (Q): $x - 2y + 2z + 1 = 0$

– K là hình chiếu của B trên Δ, H là hình chiếu của B trên (Q)

Ta có: $BK \geq BH$ nên AH là đường thẳng cần tìm

– Tìm tọa độ điểm H $(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9})$, $\overrightarrow{AH} = (\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{2}{9})$,

– Phương trình Δ qua A nên VTCP: $\vec{a} = (26; 11; -2)$

có dạng: $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$

Bài toán II

1. Khoảng cách từ một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$

Được tính theo công thức: $d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

(Nếu $M \in (P)$ thì $d(M, P) = 0$

2. Tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P)

– Từ M dựng $MH \perp (P)$

– Tìm điểm H là hình chiếu của M trên (P): $H = MH \cap (P)$

– M' đối xứng với M qua (P) thì H là trung điểm của đoạn MM' tính tọa độ

điểm M' $\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$

3. Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q)

a) Nếu $\left[\begin{array}{l} (P) \cap (Q) \\ (P) \equiv (Q) \end{array}\right.$ thì $d((P), (Q)) = 0$

b) Nếu (P) // (Q) để tính khoảng cách giữa (P) và (Q) ta có nhận xét sau: Mọi điểm nằm trên mặt phẳng (P) đều cách đều mặt phẳng (Q) và ngược lại

– Lấy điểm M bất kỳ $\in$ (Q) (hoặc N bất kỳ $\in$ (P))

– $d((P), (Q)) = d(M, (P)) = (d(N, (Q))$

4. Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)

a) Nếu đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) hoặc đường thẳng Δ cắt mặ phẳng (P) thì $d(\Delta; (P)) = 0$

b) Nếu đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) thì mọi điểm nằm trên Δ đều cách đều mặt phẳng (P). Trong trường hợp này để tính khoảng các từ Δ đến mặt phẳng (P) ta làm như sau:

– Lấy điểm M bất kỳ trên đường thẳng Δ

– $d(\Delta; (P)) = d(M; (Q))$

Bài 10: Cho khối tứ diện ABCD với A(−1; −2; 4), B(−4; −2; 0), C(3; −2; 1), D(1; 1; 1). Tính độ dài đường cao hạ từ D của khối tứ diện ABCD.

Bài giải

Cách 1:

− Lập phương trình mặt phẳng (ABC) $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 0; -3)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -25; 0)$ chọn $\vec{n} = -\dfrac{1}{25}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; 1; 0)$

Mặt phẳng (ABC) nhận 2 véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ làm cặp véc tơ chỉ phương và nhận $\vec{n} = (0; 1; 0)$ làm 1 VTPT. (ABC) đi qua điểm A.

Phương trình (ABC): $y + 2 = 0$ gọi mặt phẳng (ABC) là mặt phẳng (P)

− Từ D hạ DH ⊥ (ABC), $DH = d(\Delta; (P)) = \dfrac{|1 + 2|}{1} = 3$ (đơn vị độ dài)

Cách 2: Tính thể tích khối tứ diện Δ ABCD = V

$V = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}]\right|.\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{3}DH.\,dt\Delta ABC$ với DH ⊥ (ABC).

Tính $dt\,\Delta\,ABC = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$

Vậy $DH = d\,(D, (ABC)) = \dfrac{3V}{dt\Delta ABC} = 3$ (đơn vị độ dài).

Bài 11: Tìm tập hợp các điểm M trong không gian cách đều 2 mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q):

$$(P): x - 2y + 3z + 1 = 0$$
$$(Q): 2x - y + 3z + 5 = 0$$

Bài giải

Gọi {M(x; y; z)| d(M; (P)) = d(M; (Q))}

Ta được d(M; (P)) = d(M; (Q))

$$\Leftrightarrow \frac{|x - 2y + 3z + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|2x - y + 3z + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 9}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y + 3z + 1 = 2x - y + 3z + 5 \\ x - 2y + 3z + 1 = -2x - y - 3z - 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + y + 4 = 0 & (P_1) \\ x - y + 2z + 2 = 0 & (P_2) \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp những điểm M trong không gian cách đều 2 mặt phẳng (P) và (Q) là 2 mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): $x + y + 4 = 0$

(P_2): $x - y + 2z + 2 = 0$

Chú ý: Trong trường hợp mặt phẳng (P) // mặt phẳng (Q) thì tập hợp điểm M là 1 mặt phẳng

Bài 12: Cho 2 mặt phẳng: (P): $7x - 5y + 11z - 3 = 0$; (Q): $7x - 5y + 11z - 5 = 0$ Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q)

Bài giải

– Do $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = 1 \neq \frac{D_1}{D_2} = \frac{3}{5}$ nên mặt phẳng (P) // mặt phẳng (Q)

– Lấy điểm M bất kỳ trên mặt phẳng (P) chẳng hạn M(2; 0; –1)

– Vì mọi điểm nằm trong (P) cách đều (Q) và ngược lại nên

$$d((P); (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{|17.2 - 0 + 11(-1) - 5|}{\sqrt{49 + 25 + 121}} = \frac{2}{\sqrt{195}} \text{ (đơn vị độ dài)}$$

Bài 13: Tìm điểm M nằm trên trục Oz cách đều điểm N(1; 2; –2) và mặt phẳng (P): 2x + 2y + z – 5 = 0

Bài giải

– Gọi điểm $M(0; 0; z_0) \in Oz$

– Điểm M cách đều điểm N và mặt phẳng (P) ⇔ MN = d(M; (P))

$$\Leftrightarrow MN^2 = [d(M; (P))]^2 \Leftrightarrow 1 + 4 + (z_0 + 2)^2 = \frac{(z_0 - 5)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow \ 8z_0^2 + 26z_0 + 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = -4 \\ z_0 = -\frac{7}{4} \end{array}\right.$$

Ta tìm được 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu của bài toán: Với M(0; 0; –4) và $M(0; 0; -\frac{7}{4})$

Bài 14: Cho mặt phẳng (P): 3x – 2y – z + 5 = 0 và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)

Bài giải

– Đường thẳng Δ đi qua điểm M(1; 7; 3) và có 1 VTCP là $\vec{a} = (2; 1; 4)$, mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\vec{n} = (3; -2; -1)$

– Thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) không thỏa mãn. Vậy M không nằm trong mặt phẳng (P) và $\vec{a}.\vec{n} = 0$ nên đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) vậy $d(\Delta; (P)) = d(M; (P)) = \frac{9\sqrt{14}}{14}$ (đơn vị độ dài)

Bài 15: Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in R)$ và mặt phẳng (P): x + y + z = 0

a) Tìm điểm M nằm trên Δ sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $4\sqrt{3}$

b) Tìm điểm N nằm trên Δ để $F = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài giải

– Lấy điểm M di động trên Δ: M(2t + 1; t – 1; t) với t ∈ R

– Để $d(M; P) = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{|2t+1+t-1+t|}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow t = \pm 3$

Thay t tìm được vào tọa độ điểm M ta được 2 điểm M phải tìm có tọa độ là M(7; 2; 3) và M(–5; –4; –3)

b) Gọi điểm N ∈ Δ, N(2t + 1; t – 1; t) (t ∈ R)

– Tìm điểm N để $F = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Ta được $F = (2t+1)^2 + (t-1)^2 + t^2 = 6t^2 + 2t + 2$

$$= 6\left(t + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{6} \geq \frac{11}{6} \quad \forall t \in R$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = -\dfrac{1}{6}$

Khi t = –1 thì F đạt giá trị nhỏ nhất

Khi $t = -\dfrac{1}{6}$ được điểm $N\left(\dfrac{4}{6}; -\dfrac{7}{6}; -\dfrac{1}{6}\right)$

Bài 16: Cho 2 điểm A(–7; 4; 4) và B(–6; 2; 3)

Và mặt phẳng (P): 3x – y – 2z + 19 = 0

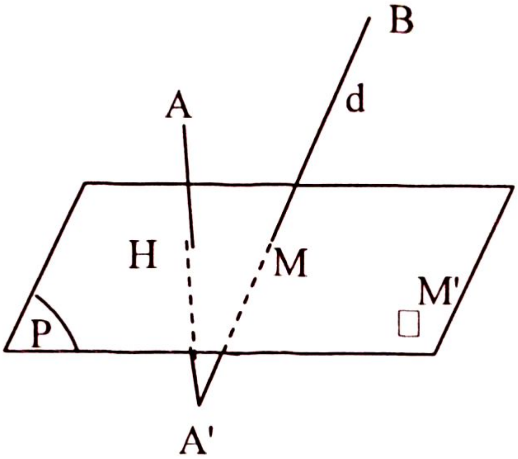
a) Tìm điểm M nằm trong mặt phẳng (P) để y = MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất

b) Tìm điểm I nằm trong mặt phẳng (P) để |IA – IB| đạt giá trị lớn nhất

Bài giải

– Gọi F = 3x – y – 2z + 19. Thay tọa độ điểm A và điểm B lần lượt vào F được F_A, F_B

$F_A = -14$; $F_B = -7$. Vì $F_A.F_B = 98 > 0$ nên 2 điểm A và B nằm về 1 phía của mặt phẳng (P) (Hình 22)



Hình 22

– Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P), nối A'B cắt mặt phẳng (P) tại điểm M.

– Chứng minh M là điểm phải tìm

+ Trong mặt phẳng (P) lấy điểm M' bất kỳ $M' \neq M$

+ Ta có $M'A + M'B = M'A' + M'B > A'B$

Mà $A'B = MA' + MB = MA + MB$

Vậy $M'A + M'B > MA + MB$

Như vậy: Với mọi điểm M nằm trong (P) chỉ có điểm $M = A'B \cap (P)$ thì MA + MB là nhỏ nhất.

– Cách tìm điểm M:

+ Tìm H là hình chiếu của A trên (P) bằng cách lập phương trình đường thẳng Δ qua A và vuông góc với (P), Δ cắt mặt phẳng (P) tại điểm H(–4; 3; 2)

+ A' đối xứng với A qua B thì H là trung điểm của đoạn AA' ta được A'(–1; 2; 0)

+ Lập phương trình đường thẳng A'B: $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in R)$

Ta được điểm M phải tìm: $M\left(-\frac{13}{3}; 2; 2\right)$

Chú ý: Có thể tìm điểm M bằng cách khác

+ Tìm H là hình chiếu vuông góc của A trên (P)

+ Tìm điểm H' là hình chiếu vuông góc của B trên (P)

+ M là điểm phải tìm thì 3 điểm H, M, H' thẳng hàng nên điểm M chia đoạn HH' theo tỷ số: $\frac{\overline{MN}}{\overline{MH}} = -\frac{HA'}{HB} = -\frac{HA}{HB}$

Giải phương trình này tìm được tọa độ điểm M

b) (Hình 23) AB cắt mặt phẳng (P) tại điểm I (Nếu AB song song với (P) thì bài toán không có lời giải: Không tìm được điểm I)

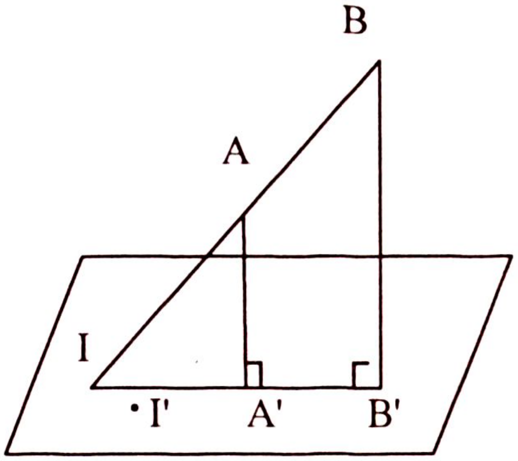
Ta chứng minh I là điểm phải tìm:

+ Trong mặt phẳng (P) lấy điểm $I' \neq I$

+ Ta có $|IA - IB| = AB$

+ $|I'A - I'B| < AB = |IA - IB|$

Như vậy trong mọi điểm I nằm trong (P) chỉ có điểm I là giao điểm của AB với (P) thì |IA – IB| là lớn nhất.



Hình 23

Cách tìm điểm I:

– Lập phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = -6 - t & (1) \\ y = 2 + 2t & (2) \\ z = 3 + t & (3) \end{cases}$ phương trình

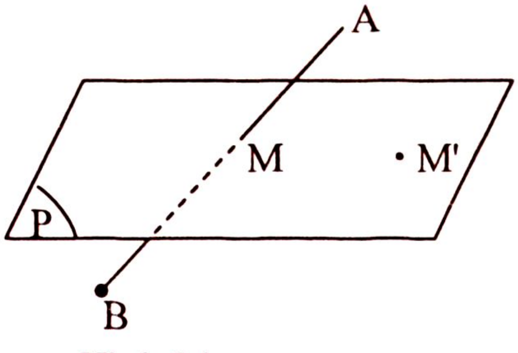
(P): $3x - y - 2z + 19 = 0$ (4)

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình (1), (2), (3), (4) giải hệ tìm được điểm $I(-5; 0; 2)$

Bài 17: Cho điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(2; 1; -3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $2x + y - 3z - 5 = 0$. Tìm điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài giải

– Gọi $F = 2x + y - 3z - 5$. Thay tọa độ điểm A, điểm B lần lượt vào F ta được F_A, F_B. Ta có: $F_A . F_B = -72 < 0$. Điều này chứng tỏ 2 điểm A và B nằm về 2 phía của mặt phẳng (P) (Hình 24)



Hình 24

– Nối AB, AB cắt mặt phẳng (P) tại điểm M

– Chứng minh M là điểm phải tìm

+ Lấy điểm M' nằm trong mặt phẳng (P): $M' \neq M$

+ Ta có $M'A + M'B > AB = MA + MB$

+ Vậy trong tất cả các điểm M nằm trong mặt phẳng (P) chỉ có điểm M là giao điểm của AB với mặt phẳng (P) thì MA + MB là nhỏ nhất.

– Cách tìm điểm M:

+ Lập phương trình đường thẳng AB, AB $\cap$ (P) = M

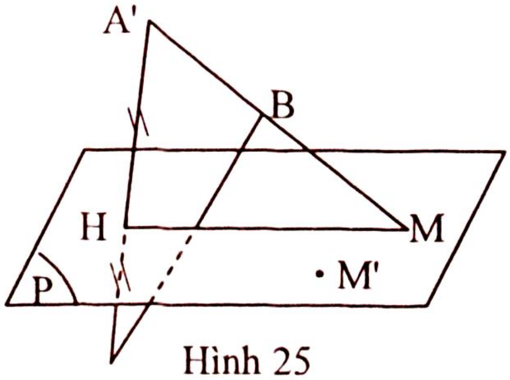
+ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - 5t \\ 2x + y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình được 1 nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{25}{17} \\ y = 1 \\ z = -\dfrac{6}{17} \end{cases}$

Tìm được tọa độ của điểm $M\left(\dfrac{25}{17}; 1; -\dfrac{6}{17}\right)$

Bài 18: Cho 2 điểm A(3; 1; 0) và B(–9; 4; 9) và mặt phẳng (P): 2x – y + z + 1 = 0. Tìm điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho |MA – MB| đạt giá trị lớn nhất

Bài giải



Hình 25

– Gọi F = 2x – y + z + 1 lần lượt thay tọa độ điểm A và B vào F ta được F_A, F_B

Ta có: $F_A.F_B = 6(-12) < 0$. Vậy 2 điểm A, B nằm về 2 phía của mặt phẳng (P)

– Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P)

– A'B cắt mặt phẳng (P) tại M. Chứng minh M là điểm phải tìm

+ Trong mặt phẳng (P) lấy điểm M' bất kỳ, M' $\neq$ M

+ Ta có |M'A – M'B| = |M'A' – MB| < A'B = |MA' – MB| = |MA – MB|

+ Vậy |MA – MB| là lớn nhất trong các điểm M nằm trong mặt phẳng (P)

– *Tìm điểm M*:

+ Tìm H là hình chiếu của A trên (P), H(1; 2; –1)

+ Tìm điểm A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P). Như vậy H là trung điểm của đoạn AA'. Tìm được điểm A'(–1; 3; 2)

+ Lập phương trình đường thẳng qua 2 điểm A'B $\begin{cases} x = -1 - 8t' \\ y = 3 + t' \quad (t' \in R) \\ z = -2 + 11t' \end{cases}$

+ Tìm điểm M = A'B ∩ (P), M(7; 2; –13)

Vậy M(7; 2; –13) là điểm phải tìm

Bài 19: Cho 2 điểm A và B với A(–3; 5; 5) và B(5; –3; 7) và mặt phẳng (P): x + y + z = 0. Tìm điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài giải

– Gọi H là trung điểm của đoạn AB, H(1; 1; 1)

– Ta có $MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$. Do AB không đổi nên $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

– Do H và (P) cố định nên MH ngắn nhất khi M là chân đường vuông góc hạ từ H xuống (P)

– **Nhận xét**: 1 VTPT của (P) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và điểm O(0; 0; 0) ∈ (P). Nên $\overrightarrow{OH} = (1; 1; 1) = \vec{n}$. Vậy OH vuông góc với mặt phẳng (P). O chính là hình chiếu của H trên (P) vậy điểm M ≡ O(0; 0; 0).

Tức là điểm M(0; 0; 0) ∈ P thì $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 20: Cho 2 điểm A(4; 2; 2) và B(0; 0; 7)

Và đường thẳng d: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$. Chứng minh d và AB cùng thuộc 1 mặt phẳng. Tìm điểm C ∈ d để ΔABC cân tại đỉnh A

Bài giải

– Chứng minh d và AB cùng thuộc 1 mặt phẳng

+ Gọi $\vec{a} = (-2; 2; 1)$ là 1 VTCP của d và M(3; 6; 1) ∈ d

+ Lập véc tơ $\overrightarrow{AB} = (-4; -2; 5)$, $\overrightarrow{AM} = (-1; 4; -1)$

+ Ta có $[\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (12; 6; 12) \neq \vec{0}$. $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương

$[\vec{a}, \overrightarrow{AB}]\overrightarrow{AM} = 0$. Chứng tỏ AB và d đồng phẳng

Vậy AB cắt d nên AB và d cùng nằm trong 1 mặt phẳng

– Gọi điểm C(3 – 2t; 6 + 2t; t + 1) nằm trên đường thẳng d

– ΔABC cân tại đỉnh A khi và chỉ khi $AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 18t - 27 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

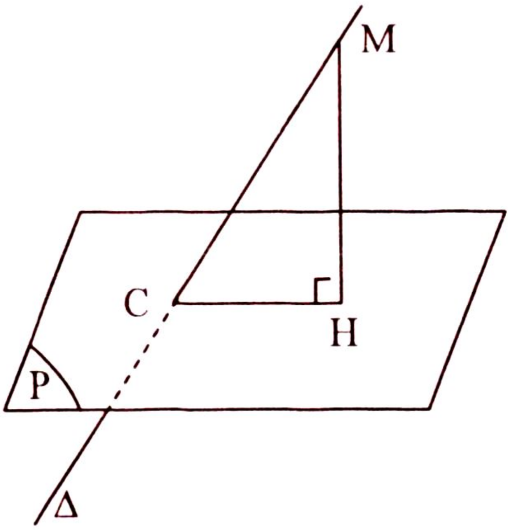
Vậy tìm được 2 điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán có tọa độ là C(1; 8; 2), C(9; 0; –2)

Bài 21: Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và

mặt phẳng (P): $x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ và (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P). Biết $BC = \sqrt{6}$

(Đề thi Đại học năm 2010 Ban A

Bài giải (Hình 26)



Hình 26

– Đường thẳng Δ có 1 VTCP là $\vec{a} = (2; 1; -1)$ và mặt phẳng (P) có VTPT: $\vec{n} = (1; -2; 1)$

– H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P)

Ta có $\cos\widehat{HMC} = \left|\cos(\vec{a}, \vec{n})\right| = \frac{1}{6}$

– $d(M; (P)) = MH = CH \, . \cos\widehat{HMC} = \sqrt{6} \, . \frac{1}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Vậy $d(M; (P)) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (đơn vị độ dài)

Bài 22: Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm A(0; 0; –2) và đường thẳn

Δ: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ.

(Đề thi Đại học A – 201

Bài giải

– Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và đi qua điể M(–2; 2; –3)

– Tính $\overrightarrow{MA} = (2; -2; 1)$; $[\vec{a}, \overrightarrow{MA}] = (7; 2; -10)$

– Khoảng cách từ M đến Δ, $d(M; \Delta) = \frac{\left|[\vec{a}, \overrightarrow{MA}]\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\sqrt{49+4+100}}{\sqrt{4+9+4}}$

$d(M; \Delta) = 3$ (đơn vị độ dài)

Bài 23: Trong không gian tọa độ Oxyz cho các điểm A(1; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với b, c > 0 và mặt phẳng (P): y – z + 1 = 0. Xác định b, c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O(0; 0; 0) đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$

Bài giải

– Lập phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn (ABC) $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

– Mặt phẳng (ABC) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_1}=\left(1;\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$, mặt phẳng (P) có 1 VTPT: $\overrightarrow{n_2}=(0;1;-1)$

– Mặt phẳng (ABC) ⊥ mặt phẳng (P) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$ (1)

– Theo giả thiết d(0, (ABC)) = $\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=8 \qquad (2)$$

– Giải hệ (1), (2) với b, c > 0 ta được b = c = $\frac{1}{2}$

Bài 24: Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 mặt phẳng (P) và (Q):

(P): x + y + z – 3 = 0

(Q): x – y + z – 1 = 0

Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O(0; 0; 0) đến (R) bằng 2 **(Đề thi Đại học D – 2010)**

Bài giải

– Mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;1)$

– Mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_2}=(1;-1;1)$

– Tính $[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]=(2;0;-2)$

– Mặt phẳng (R) phải lập vuông góc với (P) và (Q) nên véc tơ pháp tuyến của (R) là $\vec{n}$ thì $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}$, $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}$

Chọn $\vec{n}=[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]=(2;0;-2)$ là 1 VTPT của (R)

Phương trình mặt phẳng (R): 2x – 2z + 2D = 0 ⇔ x – z + D = 0

– Theo giả thiết d(0; (R)) = 2 $\Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2}}=2 \Leftrightarrow D=\pm2\sqrt{2}$

Do đó ta được 2 mặt phẳng (R) thỏa mãn yêu cầu của bài toán có phương trình là: $x-z+2\sqrt{2}=0$ và $x-z-2\sqrt{2}=0$

Bài 25: Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và 2 đường thẳng: Δ_1: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$, Δ_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ của điểm M nằm trên Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 bằng khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P)

(Đề thi Đại học A – 2009)

Bài giải

– Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm A(1; 3; –1) và có 1 VTCP là $\vec{u} = (2; 1; -2)$

– Lấy điểm M chạy trên Δ_1: $M(-1 + t; t; -9 + 6t)$

– Ta có $\overrightarrow{MA} = (2 - t; 3 - t; 8 - 6t)$, $[\overrightarrow{MA}, \vec{u}] = (8t - 14; 20 - 14t; t - 4)$

$[\overrightarrow{MA}, \vec{u}] = 3\sqrt{29t^2 - 88t + 8}$

– Khoảng cách từ M đến Δ_2: $d(M; \Delta_2) = \frac{\left|[\overrightarrow{MA}, \vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

– $d(M; (P)) = \frac{|-1 + t - 2t + 12t - 18 - 1|}{\sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11t - 20|}{3}$

– $d(M; \Delta_2) = d(M; (P)) \Leftrightarrow \sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{|11t - 20|}{3}$

$$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{53}{35} \end{array}\right.$$

– Thay t tìm được vào tọa độ của điểm N. Ta được 2 điểm M thỏa mã yêu cầu của bài toán M(0; 1; –3) và $M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$

Bài 26: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho tứ diện ABCD có các đin A(1; 2; 1), B(–2; 1; 3), C(2; –1; 1), D(0; 3; 1). Viết phương trình mặ phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoản cách từ D đến (P) **(Đề thi Đại học khối B – 2009)**

Bài giải

Mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán có 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Mặt phẳng (P) đi qua A, B và (P) // CD

– Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2)$ và $\overrightarrow{CD} = (-2; 4; 0)$ làm cặ VTCP nên nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-8; -4; -14)$ làm 1 VTPT

Phương trình mặt phẳng (P): $4x + 2y + 7z - 15 = 0$

Trường hợp 2: (P) đi qua A, B và cắt CD nên (P) sẽ cắt CD tại trung điểm của CD: I(1; 1; 1)

– Lập $\overrightarrow{AI} = (0; -1; 0)$

– Mặt phẳng (P) nhận 2 véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AI}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (2; 0; 3)$ làm 1 VTPT

Trường hợp này mặt phẳng (P) có phương trình: $2x + 3z - 5 = 0$

Vậy ta lập được 2 mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình là: $4x + 2y + 7z - 5 = 0$ hoặc $2x + 3z - 5 = 0$

Bài 27: Cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) là lớn nhất

(Đề thi Đại học A – 2009)

Bài giải

Gọi β là 1 mặt phẳng bất kỳ chứa d, H là hình chiếu của A trên d, A' là hình chiếu vuông góc của A trên β. Ta được $H \in (\beta)$ ta luôn có $AA' \le AH$. Vậy nếu mặt phẳng (α) chứa điểm H và (α) nhận $\overrightarrow{AH}$ làm VTPT thì d(A; (α)) là lớn nhất

Lập mặt phẳng (α):

– Tìm H là hình chiếu của A trên d ta được H(3; 1; 4)

– Lập $\overrightarrow{AH} = (1; -4; 1)$

– Lập mặt phẳng (α) đi qua điểm H và nhận $\overrightarrow{AH}$ làm 1 VTPT

(α) có phương trình: $x - 4y + z - 3 = 0$

Bài 28: Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $2x + y - 2z - 9 = 0$. Tìm tọa độ điểm I nằm trên đường thẳng d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2

(Đề thi đại học Ban A – 2005)

Bài giải

– Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -2 + 2t \quad (t \in R) \\ z = 3 + t \end{cases}$

– Gọi I là điểm di động trên d: I(1 – t; 2t – 3; t + 3)

– Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là: $d(I; (P)) = \frac{2|t-1|}{3}$

– Để $d(I, (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{2|t-1|}{3} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2 \end{array}\right.$

– Ta tìm được 2 điểm I là I(–3; 5; 7), I(3; –7; 1)

Bài toán 3: Khoảng cách giữa 2 đường thẳng

. **Nếu** $\left[\begin{array}{l} d_1 \text{ cắt } d_2 \\ d_1 \equiv d_2 \end{array}\right.$ thì khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1 và d_2 bằng 0

2. Nếu d_1 // d_2 thì mọi điểm nằm trên d cách đều đường thẳng d_2, mọi điểm nằm trên d_2 cách đều d_1

Trên d_1 lấy điểm M bất kỳ (hoặc trên d_2 lấy N bất kỳ)

Ta được $d(d_1; d_2) = d(M; d_2)$ ($= d(N, d_1)$)

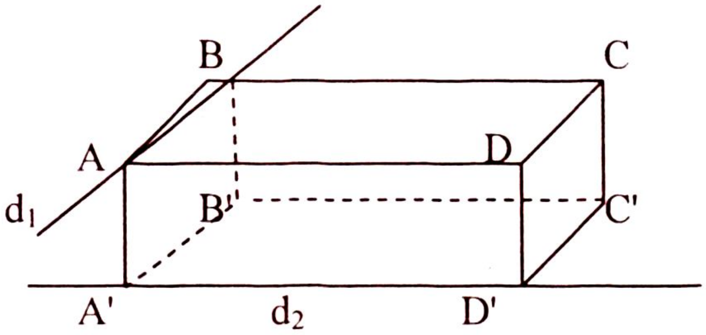
3. Nếu d_1 chéo d_2

Cách 1: Dựng hình hộp ABCD.A'B'C'D' với:

$AB = |\vec{a}|$, $\vec{a}$ là VTCP của d_1

$AD = |\vec{b}|$, $\vec{b}$ là 1 VTCP của d_2

Lấy điểm $A \in d_1$, $A' \in d_2$ lập véc tơ $\overrightarrow{AA'}$



Hình 27

– Tính thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' = V = $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AA'}\right|$

Diện tích hình bình hành ABCD = S = $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$

Ta được $V_{ABCD.A'B'C'D'} = d(d_1; d_2) . S$

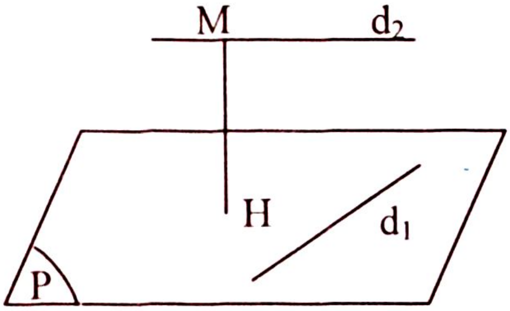
Vậy $d(d_1; d_2) = \dfrac{V}{S} \Leftrightarrow d(d_1; d_2) = \dfrac{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\overrightarrow{AA'}\right|}{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|}$

Cách 2: Hình 28

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1, P // d_2 (hoặc (P) chứa d_2 (P) // d_1)

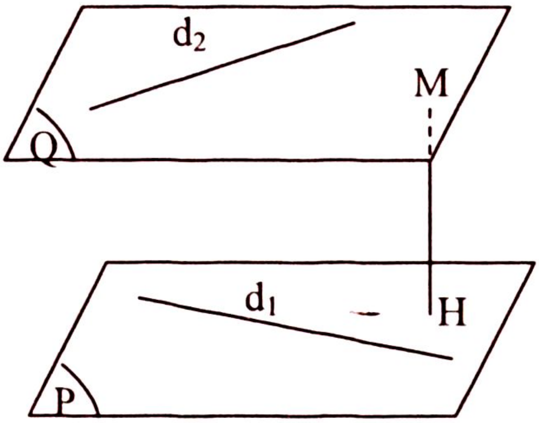
– Trên d_2 lấy điểm M bất kỳ (hoặc trên d_1 lấy N bất kỳ)

– Do mọi điểm nằm trên d_2 cách đều mặt phẳng (P) nên $d(d_1; d_2) = d(M, (P)) = d(N; (P))$



Hình 28

Cách 3: (Hình 29)



Hình 29

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1, (P) // d_2

– Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_2, (Q) // d_1

Trong thực hành, ta làm như sau:

+ Chọn $\vec{a}$ là 1 VTCP của d_1 và d_1 đi qua điểm M

+ Chọn $\vec{b}$ là 1 VTCP của d_2 và d_2 đi qua điểm N

+ Tính $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{n}$

+ Lập mặt phẳng (R) nhận $\vec{n}$ làm 1 VTPT

+ Cho (R) đi qua điểm M ta được mặt phẳng (P)

Cho (R) đi qua điểm N ta được mặt phẳng (Q)

Vì (R) // (P), (R) // (Q) nên (P) // (Q) và (P) chứa d_1, (Q) chứa d_2

– $d(d_1; d_2) = d((P); (Q)) = d(M; (P))$

Cách 4:

– Chuyển d_1, d_2 về dạng tham số (nếu d_1, d_2 chưa phải dạng phương trình tham số)

– Trên d_1 lấy điểm A di động (phụ thuộc t_1)

– Trên d_2 lấy điểm B di động (phụ thuộc t_2). Lập $\overrightarrow{AB}$

– Tìm điểm A, B sao cho $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{b}=0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm t_1, t_2 được $A \in d_1$, $B \in d_2$ và AB vuông góc với d_1 và d_2. Vậy $d(d_1, d_2) = AB$

Bài 29: Cho 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2

$$d_1: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = t-1 \\ z = 1 \end{cases} (t \in R);\ d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t'+1 \\ z = 3-t' \end{cases} (t' \in R)$$

Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2

Bài giải

Cách 1:

– d_1 có 1 VTCP là $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và đi qua điểm $M(2; -1; 1)$; d_2 có 1 VTCP là $\vec{b} = (0; 1; -1)$ và d_2 đi qua điểm $N(1; 1; 3)$

– Lập véc tơ $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; 2)$

– Tính $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1; 2; 2)$; $[\vec{a}.\vec{b}]\ \overrightarrow{MN} = 1 + 4 + 4 = 9$

$$– d(d_1; d_2) = \frac{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\ \overrightarrow{MN}\right|}{\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|} = \frac{9}{\sqrt{1+4+4}} = 3$$

Vậy $d(d_1; d_2) = 3$ (đơn vị độ dài)

Cách 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và (P) // d_2. Như vậy (P) đi qua điểm M và nhận $\vec{a}$ và $\vec{b}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (-1; 2; 2)$ làm 1 VTPT

Phương trình mặt phẳng (P): $-1(x - 2) + 2(y + 1) + 2(z - 1) = 0$

$\Rightarrow -x + 2y + 2z + 2 = 0$

$$– d(d_1; d_2) = d(N, (P)) = \frac{|-1 + 2 + 6 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = 3$$

Cách 3:

– Lập phương trình mặt phẳng (R) // d_1 và (R) // d_2 nên (R) nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp VTCP. Vậy (R) nhận $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{n} = (-1; 2; 2)$ làm 1 VTPT

Phương trình (R): $-x + 2y + 2z + D = 0$

– Cho (R) đi qua điểm M được mặt phẳng (P) chứa d_1, (P) // (R)

(P): $-x + 2y + 2z + 2 = 0$

– Cho (R) đi qua điểm N được mặt phẳng (Q) chứa d_2 và (Q) // (R)

Phương trình (Q): $-x + 2y + 2z - 7 = 0$

Như vậy, ta được (P) chứa d_1, (Q) chứa d_2 và (Q) // (P) nên:

$d(d_1; d_2) = d((P); (Q)) = d(N, (P)) = 3 = d(M; (Q))$

Cách 4: Trên d_1 lấy điểm A di động $A(2 + 2t; t - 1; 1)$

– Trên d_2 lấy điểm B di động $B(1; t' + 1; 3 - t')$

– Lập $\overrightarrow{BA} = (2t + 1; t - t' - 2; t' - 2)$

– Tìm điểm A và B sao cho $AB \perp d_1$ và $AB \perp d_2$

Khi $\begin{cases} \overrightarrow{BA}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{BA}.\vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t - t' = 0 \\ t - 2t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0$

Ta được $A(2; -1; 1) \in d_1$

$B(1; 1; 3) \in d_2$ với $AB \perp d_1$, $AB \perp d_2$

Nên $d(d_1; d_2) = AB = \sqrt{1^2 + 4 + 4} = 3$

Bài 30: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AC' và MN

(Đề thi Đại học ban A – 2006)

Bài giải

Bài này có thể dùng nhiều cách giải. ở đây trình bày cách tính khoảng cách giữa AC' và MN theo công thức tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau.

– Tọa độ đỉnh C(1; 1; 0), M là trung điểm của AB nên $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, N là trung điểm của CD nên $N\left(\frac{1}{2};1;0\right)$

– Lập véc tơ $\overrightarrow{AC}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{MN}=(0;1;0)$

– Ta có $[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}]=(1;0;1)$, $\overrightarrow{CN}=\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$

Ta có $[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}].\overrightarrow{CN}=\left(-\frac{1}{2};0;0\right)\neq\vec{0}$ nên A'C chéo MN

– $d(A'C;MN)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}].\overrightarrow{CN}\right|}{\left|[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}]\right|}=\dfrac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Vậy $d(A'C;MN)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (đơn vị độ dài)

Bài 31: Trong không gian tọa độ Oxyz cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), $S(0;0;2\sqrt{2})$

Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BM

(Đề thi Đại học Ban A – 2004)

Bài giải

– Do O là trung điểm của BD mà B(0; 1; 0) và O(0; 0; 0) nên D(0; –1; 0). O là trung điểm của AC mà A(2; 0; 0) nên C(–2; 0; 0). M là trung điểm của SC nên $M(-1;0;\sqrt{2})$.

– Tính $[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}]=(-2\sqrt{2};0;-2)$, $\overrightarrow{AB}, =(-2;1;0)$

Do $[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}]\overrightarrow{AB}=4\sqrt{2}\neq 0$ nên SA và BM chéo nhau.

Vậy $d(SA;BM)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|[\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}]\right|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

Bài tập tự luyện tập phần VI

Bài 32: Cho mặt phẳng (P): $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ và điểm A(0; 0; 1). Tìm tọa độ điểm A' là hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (P)

Bài 33: Cho 2 đường thẳng d_1: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $(t \in R)$; d_2: $\frac{x}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{-4}$

Tính khoảng cách giữa đường thẳng d_1 và d_2

Bài 34: Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng

d_1: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$ $(t \in R)$ và d_2: $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$

Bài 35: Cho đường thẳng d: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm A(3; 2; 0). Tìm điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng d.

Bài 36: Cho điểm A(1; 0; 0) và đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng d

Bài 37: Cho điểm M(2; –3; 1) và mặt phẳng (P): $x - 2y - z - 1 = 0$. Tìm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P)

Bài 38: Cho 2 đường thẳng chéo nhau

d_1: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$; d_2: $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$

Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2

Bài 39: Cho 2 đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ $(t \in R)$; Δ': $\begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = 3t' \end{cases}$ $(t \in R')$

Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'

Bài 40: Cho mặt phẳng (P): $x + y + z + 3 = 0$ và điểm A(3; 1; 1), B(7; 3; 9). Tìm điểm M nằm trên mặt phẳng (P) để $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 41: Cho đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ $(t \in R)$ và điểm M(2; 1; 4). Tìm tọa độ điểm H ∈ Δ để độ dài đoạn MH ngắn nhất

Bài 42: Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q):

(P): $x + y + z + 1 = 0$; (Q): $x - y + z - 5 = 0$

Tìm điểm M trên Oy cách đều 2 mặt phẳng (P) và (Q)

Bài 43: Cho điểm A(9; 0; 9), B(12; −6; −3) và đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 9 - t \end{cases} \quad (t \in R)$

a) Tìm điểm M nằm trên đường thẳng Δ sao cho MA + MB nhỏ nhất

b) Tìm điểm I nằm trên Δ sao cho |IA − IB| đạt giá trị lớn nhất

Bài 44: Cho A(0; 1; 2), B(2; −2; 1), C(−2; 0; 1) và mặt phẳng (P): $2x + 2y + z - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M ∈ (P) để MA = MB = MC

(Đề thi Đại học B – 2008)

Bài 45: Cho hình lăng trụ đáy $ABC.A_1B_1C_1$ biết A(a; 0; 0), B(−a; 0; 0), C(0; 1; 0), C(−a; 0; b), a và b.

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 theo a.b

b) Cho a, b thay đổi luôn thỏa mãn a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất

Bài 46: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng A_1B và B_1D

Bài 47: Cho mặt phẳng (α): $2x - y + 2z - 4 = 0$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng (α).

Hướng dẫn bài tập tự luyện phần VI

Bài 32: Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A và Δ ⊥ (P)

Δ: $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

− Δ ⊥ (P) tại điểm A' là hình chiếu của A trên (P): $A'\left(\frac{24}{49}; \frac{12}{49}; \frac{57}{49}\right)$

Bài 33: Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1 và d_2 bằng $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

Bài 34:

− Chứng minh $\Delta_1 // \Delta_2$

− $d(d_1; d_2) = d(N; d_1) = \sqrt{2}$

N(0; 1; −1) ∈ d_2

Bài 35: Đáp số: A'(−2; 0; 3)

Bài 36: $d(A; d) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 37: M'(0; 1; 3)

Bài 38: $d(d_1; d_2) = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$

Bài 39: $d(d_1; d_2) = 2\sqrt{2}$

Bài 40: M(0; –3; 0)

Bài 41: H(2; 3; 3)

Bài 42: M(0; –3; 0)

Bài 43: a) M(4; 4; 5)

b) I(0; 0; 9)

Bài 44: Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ nên ΔABC vuông tại A nên trung điểm I của BC, I(0; –1; 1) là tâm của đường tròn ngoại tuyến ΔABC, đường thẳng d đi qua I, d vuông góc với mặt phẳng (ABC), M ∈ d thì MA = MB = MC mặt khác M ∈ (P) nên M = d ∩ (ABC)

– Lập phương trình đường thẳng d đi qua I, d ⊥ (ABC)

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \quad (t \in R) \\ z = -4t + 1 \end{cases}$$

– Tìm điểm M = d ∩ (P) ta được điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán M(2; 3; –7).

Bài 45:

a) Tính $\overrightarrow{B_1C} = (a; 1; -b)$, $\overrightarrow{AC_1} = (-a; 1; b)$, $\overrightarrow{AB_1} = (-2a; 0; b)$

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{\left|[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}]\,\overrightarrow{AB_1}\right|}{\left|[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}]\right|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b) Áp dụng BĐT Côsi: $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \le \dfrac{ab}{\sqrt{2ab}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{a + b}{2} = \sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = 2

Vậy khoảng cách giữa B_1C và AC_1 lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ đạt được khi a = b = 2.

Bài 46: Đặt hình lập phương vào hệ trục Oxyz

Tính $d(A_1B; B_1D) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Bài 47:

– Tìm tọa độ giao điểm của d và (α) là điểm I(0; 0; 2)

– Trên đường thẳng d lấy điểm A(1; 2; –1)

– Tìm điểm A' là điểm đối xứng của A qua (α), $A'\left(\dfrac{11}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$

– Lập phương trình đường thẳng Δ qua IA': $\dfrac{x}{11} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z - 2}{-1}$ là đường thẳng cần tìm.

PHẦN VII. MẶT CẦU

A. Lý thuyết

I. Định nghĩa

Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ cố định và số R dương không đổi. Gọi tập hợp những điểm $M(x; y; z)$ trong không gian sao cho $MI = R \Leftrightarrow MI^2 = R^2$ là một mặt cầu. Kí hiệu là (S), (S) có phương trình $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ với tâm $I(x_0; y_0; z_0)$ và bán kính R.

– Mặt cầu tâm O(0; 0; 0) bán kính R có phương trình là:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

(Mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gọi là mặt cầu đơn vị)

– Mặt cầu (S) có tâm $I(-a; -b; -c)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ (α) có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

Gọi là phương trình tổng quát của mặt cầu (S)

II. Vị trí tương đối

1. Giữa điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ với mặt cầu (S):

$\mathbf{F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0}$ với điều kiện (α)

Gọi $F(x_0; y_0; z_0) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + 2cz_0 + d$ là phương tích của điểm M đối với mặt cầu (S). Kí hiệu là $P_{M/(S)} = F(x_0; y_0; z_0)$

a) $P_{M/(S)} > 0 \Leftrightarrow$ Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S)

b) $P_{M/(S)} < 0 \Leftrightarrow$ điểm M nằm miền trong của (S)

c) $P_{M/(S)} = 0 \Leftrightarrow M \in$ mặt cầu (S)

2. Giữa mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ (với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$) và mặt cầu (S) tâm I, bán kính R

– Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P): $d(I; (P)) = d$

a) $d > R \Leftrightarrow (S) \cap (P) = \varnothing$ (mặt phẳng (P) và (S) không có điểm chung)

b) $0 < d < R \Leftrightarrow$ (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròng (T). Đường tròn (T) có tâm H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) bán kính r của (T): $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Đường thẳng Δ đi qua I vuông góc với mặt phẳng (P) tại H, Δ được gọi là trục của đường tròn (T)

c) $d = R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), tiếp xúc với nhau tại 1 điểm A duy nhất; A được gọi là tiếp điểm, IA = R, (P) được gọi là tiếp diện của mặt cầu (S)

– Tìm điểm A:

Cách 1:

+ Lập phương trình đường thẳng Δ qua I, Δ ⊥ (P)

+ Tìm A = (P) ∩ Δ

Cách 2: Giải hệ phương trình: giữa phương trình mặt cầu (S) và phương trình mặt phẳng (P) nghiệm duy nhất của hệ và tọa độ điểm A

3. Giữa đường thẳng Δ và mặt cầu (S), tâm I, bán kính R

– Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến đường thẳng Δ: $d(I, \Delta) = d$

– Có các trường hợp sau:

a) $d > R \Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \varnothing$: đường thẳng Δ và mặt (S) không có điểm chung

b) $0 < d < R \Leftrightarrow$ Δ cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt A và B

c) $d = R \Leftrightarrow$ Δ tiếp xúc (S) tại 1 điểm M duy nhất

Trong trường hợp này người ta gọi Δ là tiếp tuyến của mặt cầu (S) tại điểm M, tất cả tiếp tuyến của mặt cầu (S) tại M nằm trong mặt phẳng tiếp diện (P) của mặt cầu (S) tại điểm M.

(Từ 1 điểm A nằm ngoài mặt cầu (S) kẻ được vô số tiếp tuyến với mặt cầu (S): khoảng cách từ M đến các tiếp điểm bằng nhau)

B. CÁC LOẠI BÀI TẬP VỀ MẶT CẦU

Bài toán 1: Xác định phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu, xác định tâm và bán kính của mặt cầu (S)

Để xác định 1 phương trình đã cho có phải là phương trình của mặt cầu hay không ta dùng 2 phương pháp sau:

Phương pháp 1: Viết phương trình đã cho về dạng:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu (S) tâm $I(x_0; y_0; z_0)$ bán kính R

Phương pháp 2: Viết phương trình tổng quát của (S) với điều kiện (α). Dùng phương pháp đồng nhất hệ số để tìm a, b, c, d và kiểm tra điều kiện (α) thỏa mãn thì phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(-a; -b; -c)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Bài 1: Cho phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ (1). Xét xem (1) có phải là phương trình mặt cầu không? Nếu (1) là phương trình mặt cầu hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Bài giải

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16 > 0$

Vậy (1) là phương trình của mặt cầu (S) tâm $I(4; -1; 0)$ bán kính $R = 4$

Cách 2: Phương trình tổng quát của mặt cầu (S) có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

Với điều kiện (α) $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, đồng nhất các hệ số với phương trình (1) ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 2a = -8 \\ 2b = 2 \\ 2c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$

Điều kiện (α) trở thành: $a^2 + b^2 + c^2 - d = 16 + 1 + 0 - 1 = 16 > 0$

Tìm (α) vậy (1) là phương trình của mặt cầu (S) tâm I(4; −1; 0) bán kính R = 4.

Bài 2: Cho phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$ (1)

và phương trình: $x^2 + y^2 - z^2 + 4x - 2y + 2z + 1 = 0$ (2)

Xét xem phương trình (1) và (2) có phải là phương trình mặt cầu không?

Bài giải

* Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = -\frac{11}{4} < 0$

Vậy (1) không là phương trình của mặt cầu

* Phương trình (2): dùng đồng nhất hệ số. Trong phương trình mặt cầu. Hệ số của $z^2 = 1 > 0$. ở phương trình (2) hệ số của $z^2 = -1$ nên (2) không là phương trình của mặt cầu.

Bài 3: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m + 4 = 0$ (1) là phương trình của mặt cầu. Khi đó hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó

Bài giải

(1) $\Leftrightarrow (x - 2m)^2 + (y + 2)^2 + (z + m)^2 = 4m^2 - 4m$

Để (1) là phương trình của 1 mặt cầu thì $4m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$ (α)

Với m ∈ (α) mặt cầu (S) có phương trình (1) có tâm I(2m; −2; −m) bán kính $R = 2\sqrt{m^2 - m}$

Bài toán 2: Lập phương trình mặt cầu

1. **Bài 1**: Lập phương trình mặt cầu (S) biết tâm I(3; −2; 1) và (S) đi qua điểm M(2; −1; −3)

Bài giải

Vì (S) đi qua điểm M tức M ∈ (S) ⇔ MI = R là bán kính của mặt cầu (S)

Ta được $R = MI = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 + 2)^2 + (1 + 3)^2} = 3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) phải lập có dạng:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = 18$$

Bài 2: Lập phương trình mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính với A(4; –3; –3) và B(2; 1; 5).

Bài giải

Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính nên tâm I của mặt cầu là trung điểm của đoạn AB ta được I(3; –1; 1) bán kính của mặt cầu (S):

$$R = \frac{AB}{2} = \sqrt{21}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$

2. Chứng minh rằng: Mọi hình lăng trụ đứng, đáy là đa giác có đường tròn ngoại tiếp thì lăng trụ đó có mặt cầu ngoại tiếp. Tức là mặt cầu đi qua các đỉnh của hình lăng trụ. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó

Bài giải

Chẳng hạn lăng trụ $A_1A_2... A_n. B_1B_2...B_n$ là lăng trụ đứng có các cạnh bên A_1B_1, A_2B_2;..., A_1B_1 vuông góc với mp đáy. Và 2 đáy có đường tâm ngoại tiếp tâm O_1 và O_2. Vậy $O_1O_2 \perp$ mp đáy và O_1O_2 là trục đối xứng của lăng trụ.

Lấy I là trung điểm của đoạn O_1O_2 ta được:

$IA_1 = IA_2 = \ldots = IA_n$ và $IB_1 = IB_2 = \ldots IB_n$

Do Δ vuông IA_1O_1 = Δ vuông IB_1O_2 nên $IA_1 = IB_1$

Vậy $IA_1 = IA_2 = \ldots = IA_n = IB_1 = IB_2 = \ldots = IB_n$

Vậy điểm I cách đều các đỉnh của lăng trụ nên lăng trụ có 1 mặt cầu tâm I bán kính $R = IA_1$ ngoại tiếp

Bài 3: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' với A(0; 0; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), B'(4; 0; 4). Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ

Bài giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 3; 0)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ chứng tỏ $AB \perp AC$

ΔABC vuông tại A, ΔA'B'C' vuông tại A'

Gọi O_1 là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, O_1 là trung điểm của BC, O_2 là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔA'B'C', O_2 là trung điểm của B'C', I là trung điểm của O_1O_2

Ta được $O_1\left(2;\frac{3}{2};0\right)$, $O_2\left(2;\frac{3}{2};4\right)$ (Do B'(4; 0; 4), C'(0; 3; 4))

$I\left(2;\frac{3}{2};2\right)$. Vì $IA = IB = IC = IA' = IB' = IC' = \frac{\sqrt{41}}{2}$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C' có tâm I và bán kính $R = \frac{\sqrt{41}}{2}$

phương trình mặt cầu phải lập có dạng:

$$(x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 + (z-2)^2 = \frac{41}{4}$$

Bài 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với A'(0; 0; 0), B'(a; 0; 0), D'(0; b; 0), A(0; 0; c); a, b, c > 0. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho.

Bài giải

Tọa độ điểm C'(a; b; 0). Ta đã biết hình hộp chữ nhật có 4 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại điểm I là trung điểm của mỗi đường chéo.

Vậy I là tâm của mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật và bán kính $R = \frac{1}{2}AC'$.

Ta được $I(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2})$ và $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Vậy phương trình mặt cầu phải lập

$$(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{b}{2})^2+(z-\frac{c}{2})^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

3. Chứng minh rằng: Bất kỳ một khối tứ diện ABCD nào, đều có một mặt cầu ngoại tiếp (mặt cầu đi qua 4 đỉnh của khối tứ diện). Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó

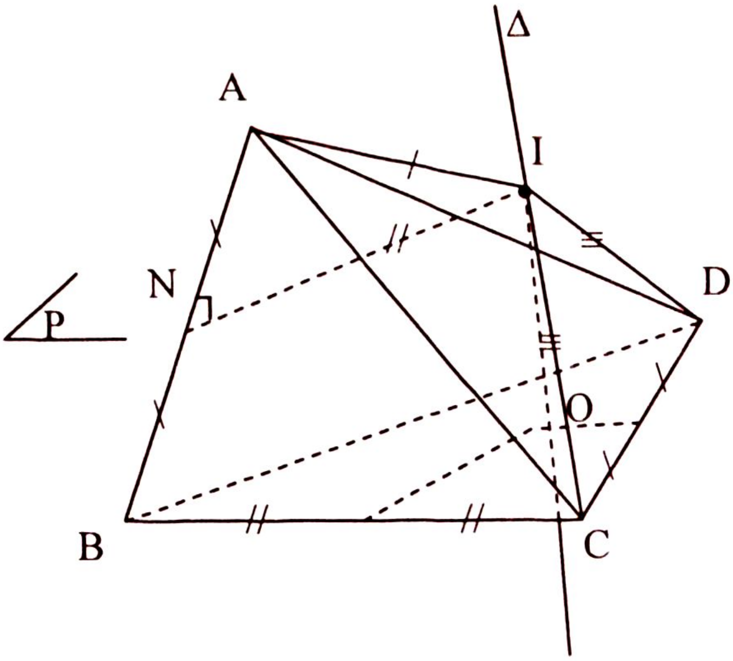
Chứng minh

– Từ điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

– Dựng đường thẳng Δ đi qua O, Δ ⊥ (BCD) ta được mọi điểm nằm trên Δ cách đều 3 điểm B, C, D và ngược lại.

– Dựng (P) là mặt phẳng trung trực của AB (hoặc AC, hoặc AD)

(P) cắt Δ tại điểm I, ta có: $\left.\begin{matrix} IA = IB \\ IB = IC = ID \end{matrix}\right\}$ nên điểm I cách đều 4 đỉnh A, B, C, D. Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện ABCD và bán kính R = IA



Hình 30

Bài 5: Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có A(6; −2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; 1), D(4; 1; 0)

Bài giải

Cách 1: Gọi I(x_0; y_0; z_0) là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện ABCD ta được IA = IB = IC = ID

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases}$

Tìm x_0, y_0, z_0. Ta tìm được tâm I của mặt cầu (S) và bán kính mặt cầu (S): R = IA. Từ đó lập phương trình mặt cầu (S)

Cách 2:

– Viết phương trình mặt cầu (S):

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ (1)

Tâm I(−a; −b; −c) bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ (với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Thay tọa độ A, B, C, D vào phương trình (1). Giải hệ phương trình

Tìm a, b, c, d nếu thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

Thì thay a, b, c, d vào (1) được phương trình mặt cầu (S) phải lập

Cách 3:

– Lập phương trình Δ đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và Δ ⊥ (BCD)

+ Có thể tìm tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\begin{cases} OB^2 = OC^2 = OD^2 \\ O \in mp(BCD) \end{cases}$ dựng Δ ⊥ (BCD) tại O

+ Hoặc dựng mặt phẳng trung trực của BC, là (α), mặt phẳng trung trực của CD là (β), (α) cắt (β) theo giao tuyến Δ.

– Dựng mặt phẳng trung trực của AB (hoặc AC, hoặc AD) mặt phẳng này cắt Δ tại điểm I. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và bán kính R = IA.

Giải bài tập 5: Theo cách 1

Gọi I(x_0; y_0; z_0) là tâm của mặt cầu (S), I(x_0; y_0; z_0)

Ta được: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x_0 - 6)^2 + (y_0 + 2)^2 + (z_0 - 3)^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 6)^2 \\ (x_0 - 6)^2 + (y_0 + 2)^2 + (z_0 - 3)^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2 + (z_0 + 1)^2 \\ (x_0 - 6)^2 + (y_0 + 2)^2 + (z_0 - 3)^2 = (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - y_0 - z_0 = 2 \\ 2x_0 - y_0 + 2z_0 = 11 \\ 2x_0 - 3y_0 + 3z_0 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 3 \end{cases} \text{ được } I(2; -1; -3)$$

Bán kính của mặt cầu (S): $R = IA = \sqrt{17}$

Vậy phương trình mặt cầu phải lập (S): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 17$

Chú ý: Khi lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện ABCD, ngoài các phương pháp nêu trên, căn cứ vào tính chất đặc trưng của khối tứ diện: tứ diện đều, tứ diện vuông, tứ diện gần đều... Để có cách giải nhanh và thuận tiện hơn. Sau đây là 1 số ví dụ minh họa.

Bài 6: Cho khối tứ diện ABCD với A(1; 0; 1), B(0; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 1). Lập phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài giải

Trước hết ta nhận thấy: $AB = AC = AD = BC = CD = BD = \sqrt{2}$

Vậy ABCD là khối tứ diện đều

– Lấy M: Trung điểm của AB, $M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$

N: Trung điểm của CD, $N\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$

Ta được ΔANB cân đỉnh N, ΔMCD cân đỉnh M

Vậy MN ⊥ AB tại M, MN vuông góc với CD tại N

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD

– Lấy I là trung điểm của AB và CD

ΔIAB cân đỉnh I, nên IA = IB

ΔICD cân đỉnh I, nên IC = ID

ΔIAM vuông tại M = ΔIND vuông tại N

Nên IA = ID

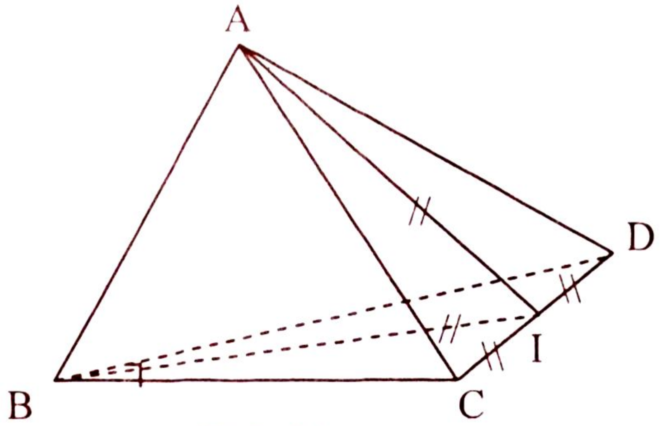
Vậy IA = IB = IC = ID. Do đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp ABCD, $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Bán kính $R = IB = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Tất nhiên để lập phương trình mặt cầu (S) có thể dùng cả 3 cách nêu ở bài 5.

Bài 7: Cho khối tứ diện ABCD với A(1; 1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2), D(2; 2; 1). Lập phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD

Bài giải (Hình 31)



Hình 31

Ta có $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 1; 0)$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 0$ chứng tỏ AD ⊥ AC tại A và $\overrightarrow{BD} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -1; -1)$

Nên $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = 0$ vậy BD ⊥ BC tại B

Lấy I trung điểm DC. Do AI và BI là 2 đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của 2 tam giác vuông ACD và BCD

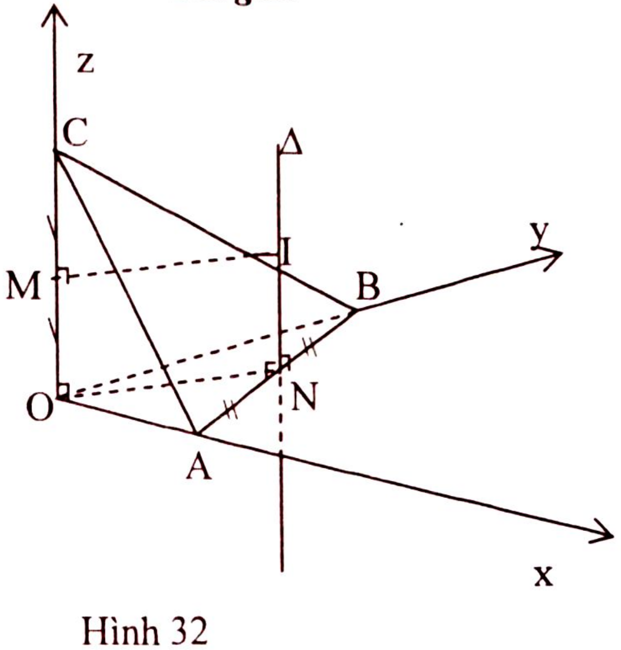
Nên IA = IB = IC = ID. Với $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp khối tứ diện ABCD và bán kính $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp khối tứ diện ABCD có dạng (S):

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Bài 8: Cho tứ diện OABC với O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với a, b, c > 0. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện OABC

Bài giải

Cách 1: (Hình 32)



Hình 32

– Tam giác OAB vuông tại O, N là trung điểm của AB, $N\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right)$

– Lập phương trình Δ đi qua N là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB và Δ ⊥ (OAB)

Phương trình Δ: $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ x = \frac{b}{2} \\ z = t \end{cases}$ được mọi điểm nằm trên Δ cách đều O, B, A

– Lấy điểm I ∈ Δ, $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};t\right)$. Tìm t để IC = IO

$\Leftrightarrow IO^2 = IC^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + (t-c)^2 \Leftrightarrow t = \frac{c}{2}$

Ta được $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$ Vì I ∈ Δ nên IB = IA = IO và IO = IC

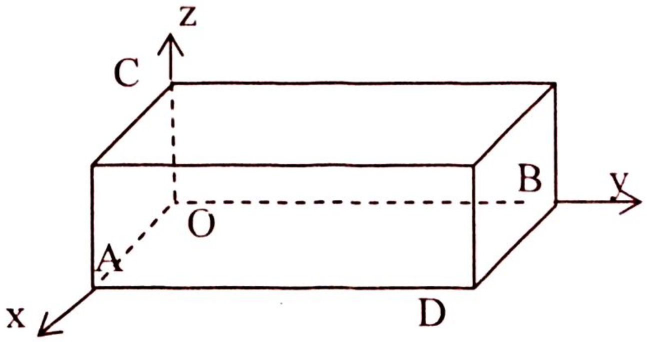
Nên IA = IB = IC = IO vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện OABC, bán kính mặt cầu $R = IO = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Vậy phương trình mặt cầu (S):

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

Cách 2: Hình 33

Đặt khối tứ diện OABC vào hình hộp chữ nhật như hình vẽ: ta được mặt cầu ngoại tiếp OABC cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật như hình 33.



Hình 33

Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$ là trung điểm của đường chéo CD của hình hộp chữ nhật với D(a; b; 0)

Bán kính $R = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

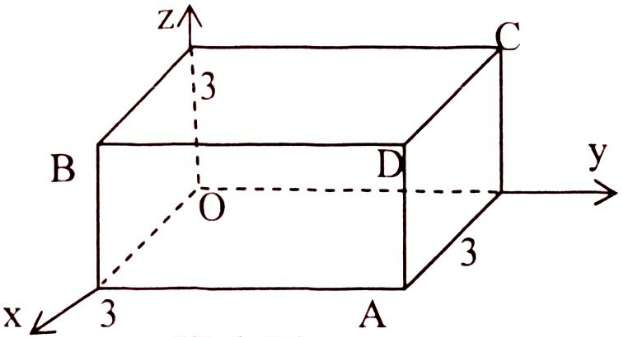
Vậy phương trình mặt cầu (S):

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 9: Trong hệ trục Oxyz cho 4 điểm A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3). Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D

(Đề thi Đại học năm 2008 – Ban D)

Bài giải



Hình 34

Có thể dùng nhiều cách giải khác nhau, ở đây do nhận xét: Theo giả thiết thì A, B, C, D là 4 trong 8 đỉnh của hình lập phương có độ dài bằng 3 (hình 34). Bởi vậy, mặt cầu qua A, B, C, D cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương tâm I là tâm của hình lập phương, nghĩa là I là trung điểm của đường chéo OD: $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{OD}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

4. a) Chứng minh rằng: Mọi hình chóp mà đáy là đa giác có đường tròn ngoại tiếp tâm O, đều có mặt cầu ngoại tiếp

Chứng minh

Giả sử hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ mà đáy là đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ có đường tròn ngoại tiếp tâm O. Từ O dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy. Ta được với mọi điểm nằm trên Δ đều cách đều các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dựng (P) là mặt phẳng trung trực của cạnh bên. Chẳng hạn của SA_1, $(P) \cap \Delta = I$.

Ta được $IS = IA_1$ như vậy $IS = IA_1 = IA_2 = \ldots = IA_n$. Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, có bán kính của mặt cầu $R = IS = IA_1$.

Thông thường, để tìm điểm I ta viết phương trình tham số của Δ, trên Δ lấy điểm I di động rồi giải IS = IA_1. Tìm I

Như vậy ta suy ra: Mọi hình chóp tam giác, hình chóp đáy là hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân… đều có mặt cầu ngoại tiếp.

b) Chứng minh rằng: Mọi hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$ đều có 1 mặt cầu ngoại tiếp. Hãy nêu cách tìm tâm I và bán kính của mặt cầu đó

Chứng minh

Vì hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ là hình chóp đều, O là tâm đáy nên SO là trục đối xứng của hình chóp đều. Bởi vậy mọi điểm nằm trên SO cách đều các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lấy điểm I ∈ SO sao cho IS = IA_1 ta được điểm I cách đều S và các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều.

Cách xác định điểm I:

– Viết phương trình tham số của đường thẳng SO.

– Trên SO lấy điểm I phụ thuộc tham số t

– Giải phương trình $IS^2 = IA_1^2$ tìm được t tức là tìm được điểm I cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp vậy tâm của mặt cầu là điểm I.

– Bán kính của mặt cầu tính R = IS

Bài tập 10: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết S(3; 2; 4), B(1; 2; 3), D(3; 0; 3). Lập phương trình mặt cầu (I) ngoại tiếp hình chóp S.ABCD

Bài giải

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, O(2; 1; 3)

– Tính $\overrightarrow{OS} = (1; 1; 1)$

– Lập phương trình tham số của đường thẳng SO $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \quad (t \in R) \\ z = 3 + t \end{cases}$

– Vì mọi điểm nằm trên SO cách đều ABCD nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp phải nằm trên SO và IS = IB ⇔ $IS^2 = IB^2$ với I(2 + t; 1 + t; 3 + t) ta được phương trình:

$$(t-1)^2 + (t-1)^2 + (t-1)^2 = (t+1)^2 + (t-1)^2 + t^2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$$

Ta được điểm $I\left(\frac{13}{6}; \frac{7}{6}; \frac{19}{6}\right)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Bán kính $R = IS = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

Vậy phương trình mặt cầu (I) phải lập có dạng:

$$\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{19}{6}\right)^2 = \frac{125}{36}$$

5. Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với 1 mặt phẳng, tiếp xúc với đường thẳng

Bài tập 11: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x - y - 3z + 1 = 0$ và có tâm $I(3; -5; -2)$

Bài giải

Muốn lập được phương trình mặt cầu (S). Ta phải tính bán kính R (vì giả thiết đã cho tâm I). Do (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên bán kính $R = d(I, (P)) \Leftrightarrow R = \dfrac{12.3 - 1(-5) - 3(-2) + 1}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \dfrac{18}{\sqrt{14}}$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = \dfrac{162}{7}$

Bài 12: Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính $R = 3$ và mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z + 3 = 0$ tại điểm $M(1;1;-3)$

Bài giải

Gọi tâm I của mặt cầu (S), $I(x_0; y_0; z_0)$ vì bán kính mặt cầu (S) $R = 3$ và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm M. Nên I phải nằm trên đường thẳng Δ đi qua M và $\Delta \perp$ mặt phẳng (P) và I phải cách (P) một khoảng bằng 3.

– Tập hợp những điểm $A(x; y; z)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3, thỏa mãn $\dfrac{|x + 2y + 2z + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 2y + 2z = 6 & (P_1) \\ x + 2y + 2z = -12 & (P_2) \end{array}\right.$

Vậy tập hợp điểm A là 2 mặt phẳng (P_1) và (P_2)

– Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M, $\Delta \perp$ mặt phẳng (P) nên Δ nhận 1 VTPT của (P) là $\overline{n} = (1; 2; 2)$ làm 1 VTCP

Phương trình tham số của Δ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \quad (t \in R) \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

– Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P_1) tại điểm I_1. Tìm được tọa độ điểm $I_1(2; 3; 1)$

Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P_2) tại điểm I_2. Tìm được tọa độ điểm $I_2(0; -1; -5)$

Như vậy ta được 2 mặt cầu thỏa mãn yêu cầu của bài toán, có phương trình là:

(S_1): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$; (S_2): $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 9$

Bài 13: Lập phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1; 2; -1)$ và (S) tiếp xúc với đường thẳng d: $\dfrac{x + 1}{3} = \dfrac{y - 2}{-3} = \dfrac{z - 2}{2}$.

Bài giải

Vì (S) tiếp xúc với đường thẳng d nên $d(I; d) = R$

Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng d

+ Đường thẳng d đi qua điểm M(−1; 2; 2) và có 1 VTCP là $\vec{a} = (3; -3; 2)$

+ Lập véc tơ $\overrightarrow{IM} = (-2; 0; 3)$

+ Tính $\left[\vec{a}, \overrightarrow{IM}\right] = \left(\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-9; -13; -6)$

+ $d(I; d) = \dfrac{\left[\vec{a}, \overrightarrow{IM}\right]}{\left|\vec{a}\right|} = \dfrac{\sqrt{22.13}}{\sqrt{22}} = \sqrt{13} = R$

Vậy phương trình mặt cầu (S) phải lập: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 13$

Bài 14: Cho đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$

Và mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 2 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I nằm trên đường thẳng d và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) với bán kính bằng 1

Bài giải

Gọi I là tâm mặt cầu (S). Vì $I \in d$ nên ta được $I(1 + 3t; t - 2; t)$; (S) tiếp xúc với (P) và (S) có bán kính R = 1 nên ta được d(I; (P)) = 1

$$\Leftrightarrow |5t + 2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Với t = −1 ta được $I_1(-2; -3; -1)$

Với $t = \dfrac{1}{5}$ ta được $I_2\left(\dfrac{8}{5}; -\dfrac{9}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$

Vậy được 2 mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu của bài toán có phương trình:

$(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 1$ và $\left(x - \dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \dfrac{9}{5}\right)^2 + \left(z - \dfrac{1}{5}\right)^2 = 1$

Bài 15: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I nằm trên đường thẳng

Δ: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ và (S) tiếp xúc với 2 mặt phẳng:

(P): $x + y - 2z + 5 = 0$; (Q): $2x - y + z + 2 = 0$

Bài giải

Cách 1: Gọi I là tâm của mặt cầu (S), vì $I \in \Delta$ nên $I(2t; 2t - 1; 2t - 1)$ và do (S) tiếp xúc với (P) và (Q) nên d(I; (P)) = d(I; (Q))

$$\Leftrightarrow \frac{|-t + 8|}{\sqrt{6}} = \frac{|5t|}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4}{3} \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{4}{3}$ ta được tâm $I\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{7}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{20}{3\sqrt{6}}$

Với t = –2 được tâm I(–4; –1; –5) và bán kính $R = \frac{10}{\sqrt{6}}$

Do đó ta được 2 mặt cầu thỏa mãn yêu cầu của bài toán có phương trình là: $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{200}{27}$ và $(x+4)^2+(y+1)^2+(z+5)^2=\frac{50}{3}$

Cách 2:

– Tìm tập hợp những điểm M(x; y; z) cách đều 2 mặt phẳng (P) và (Q) ta được 2 mặt phẳng:

$(P_1): x - 2y + 3z - 3 = 0$

$(P_2): 3x - z + 7 = 0$

– Tìm điểm $I_1 = d \cap (P_1)$: ta được $I_1(-4; -1; -5)$ là tâm của mặt cầu (S): $R_1 = \frac{10}{\sqrt{6}}$

– Tìm điểm $I_2 = d \cap (P_2)$ được $I_2\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$ và bán kính mặt cầu (S):

$$R_2 = \frac{20\sqrt{6}}{18} = \frac{10\sqrt{6}}{9}$$

– Lập được 2 mặt cầu tâm I_1, bán kính R_1 và tâm I_2, bán kính R_2 giống cách 1

Chú ý:

– Nếu tìm điểm $A = d \cap (P)$, $B = d \cap (Q)$

– Lấy I là trung điểm của đoạn AB thì nói chung I không phải là tâm của mặt cầu (S). Điều đó chỉ đúng khi góc giữa d và (P) bằng góc giữa d và (Q) hoặc mặt phẳng (P) // mặt phẳng (Q).

Bài 16: Cho 2 đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau có phương trình:

$$d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases} (t \in R);\ d_2: \begin{cases} x = t' \\ y = -t' + 3 \\ z = 0 \end{cases} (t' \in R)$$

Lập phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2

Bài giải

– Trên đường thẳng d_1 lấy điểm M di động M(2t; t; 4) và d_1 có 1 VTC là $\vec{a} = (2; 1; 0)$

Trên d_2 lấy điểm N di động N(t'; 3 – t'; 0) và d_2 có 1 VTCP là $\vec{b} = (1; -1; 0$

– Lập véc tơ $\overrightarrow{MN} = (t' - 2t; 3 - t' - t; -4)$

– Tìm M, N để $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{b} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(t'-2t)+3-t'-t=0 \\ t'-2t+t'-3+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=2 \end{cases}$$

Ta được $M(2;\,1;\,4) \in d_1$, $N(2;\,1;\,0) \in d_2$ và MN vuông góc với d_1 và d_2

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2

Mặt cầu (S) nhận MN làm đường kính nên tâm I của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn MN, $I(2;\,1;\,2)$ và bán kính của (S) là $R = \frac{1}{2}MN = 2$

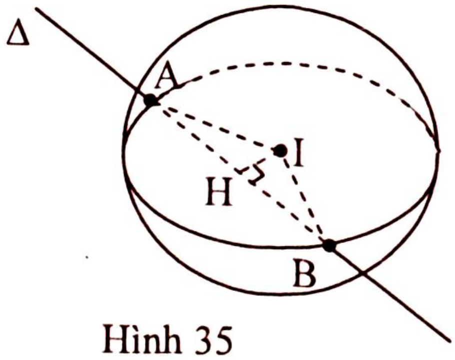
Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$

Chú ý: Ta được d_1 và d_2 là 2 tiếp tuyến tại M và N của mặt cầu (S)

5. Một số bài toán khác về lập phương trình mặt cầu

a) Lập phương trình mặt cầu (S) cho biết tâm I và đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm A, B, biết độ dài đoạn AB

Phương pháp giải (Hình 35)



Hình 35

– Lấy H là trung điểm của đoạn AB, tính được $HA = HB = \frac{1}{2}AB$

Vì ΔIAB cân đỉnh I

– Tính $d = d(I;\,\Delta)$

– Xét ΔAIH vuông tại H, tính $R = IA = \sqrt{d^2 + HA^2}$

– Biết tâm I và bán kính R: lập phương trình mặt cầu (S)

Bài 17: Lập phương trình mặt cầu (S) biết tâm $I(2;\,3;\,-1)$ và (S) cắt đường thẳng Δ tại 2 điểm A, B. Biết $AB = 16$ và phương trình đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-5 \\ z = -2t-15 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Bài giải

– Gọi H là trung điểm của đoạn AB, do ΔIAB cân đỉnh I nên $IH \perp \Delta$ và $HA = HB = 8$

– Tính khoảng cách từ I đến Δ

+ Δ đi qua điểm $M(1;\,-5;\,-15)$

+ Lập $\overrightarrow{IM} = (-1;\,-8;\,-14)$

+ Tính $\left\|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right\| = 45$, $|\vec{u}| = 3$, $\vec{u} = (2; 1; -2)$ là VTCP của Δ

+ $d(I, \Delta) = IH = \dfrac{45}{3} = 15 = d$

– Tính bán kính của mặt cầu (S): $R = IA$

ΔIAH vuông tại H: $R = IA = \sqrt{AH^2 + d^2} = 17$

– Phương trình mặt cầu (S): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 289$

b) Lập phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua mặt phẳng (P)

Bài 18: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z - 14 = 0$ lập phương trình mặt cầu (S') đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (P):

$$x + y + z = 0 \quad (4)$$

Bài giải

– (S) có phương trình: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 25$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; -1)$ và bán kính $R = 5$

– Vì mặt cầu (S') đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (P) nên bán kính mặt cầu (S') là $R' = R = 5$ và tâm I' đối xứng với I qua mặt phẳng (P).

– Tìm điểm I':

+ Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua I và Δ vuông góc với (P):

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t & (1) \\ y = -3 + t & (2) \quad (t \in R) \\ z = -1 + t & (3) \end{cases}$$

+ Δ vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình (1), (2), (3), (4) ta được $H(2; -2; 0)$

+ Điểm I' đối xứng với I qua (P) nên H là trung điểm của đoạn II', ta được $I'(3; -1; 1)$.

– Phương trình mặt cầu (S') tâm I' bán kính $R' = 5$ có dạng:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$$

c) Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng Δ tâm I cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng d và mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là 1 đường tròn bán kính r

Phương pháp giải

Để lập được phương trình mặt cầu (S) phải xác định tâm I là bán kính R

– Xác định tâm I: lấy điểm I di động trên Δ

Vì khoảng cách từ I đến (P) bằng d nên giải phương trình $d(I; (P)) = d$ tìm được điểm I

– Bán kính mặt cầu (S) bằng R: $R^2 = d^2 + r^2$

– Lập phương trình mặt cầu (S) biết tâm I và bán kính R

Bài 19: Cho đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = -t \\ y = 2t - 1 \quad (t \in R) \\ z = t + 2 \end{cases}$

Và mặt phẳng (P): $2x - y - 2z - 2 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I nằm trên đường thẳng Δ và I cách (P') một khoảng bằng 2, mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến và đường tròn có bán kính r = 3

Bài giải

– Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Theo giả thiết $I \in \Delta$ nên $I(-t; 2t - 1; t + 2)$. Vì I cách (P) một khoảng d = 2 nên d(I; P) = 2. Giải phương trình tìm được $t = \frac{1}{6}$ và $t = \frac{11}{6}$

Với $t_1 = \frac{1}{6}$ ta được điểm $I_1\left(-\frac{1}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{13}{6}\right)$

Với $t_2 = \frac{11}{6}$ ta được $I_2\left(\frac{11}{6}; -\frac{14}{3}; \frac{1}{6}\right)$

– Bán kính mặt cầu (S): bằng R, r = 3 là bán kính của đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta được: $R^2 = d^2 + r^2 = 13$

Ta được 2 mặt cầu phải lập có phương trình:

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{6}\right)^2 = 13$$

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{14}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = 13$$

d) Tìm tập hợp điểm

Bài 20: Cho khối tứ diện ABCD với A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6). Tìm tập hợp những điểm M trong không gian sao cho:

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4 \quad (1)$$

Bài giải

– Gọi điểm M trong không gian M(x; y; z)

Tính $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (4 - 4x; 8 - 4y; 12 - 4z)$

$(1) \Leftrightarrow 16(x - 1)^2 + 16(y - 2)^2 + 16(z - 3)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$ (S)

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu (S) có phương trình (S)

Bài 21: Cho điểm A(–2; 2; –2), B(3; –3; 3) tìm tập hợp điểm M trong không gian sao cho 3MA = 2MB (1)

Bài giải

Gọi điểm M trong không gian M(x; y; z)

Tính MA = $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2}$

MB = $\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2}$

Vậy (1) $\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2 = 108$

Do đó tập hợp điểm M thỏa mãn (1) là mặt cầu (S) tâm I(–6; 6; –6) bán kính R = $6\sqrt{3}$

Bài toán 3: Tiếp diện của mặt cầu

Bài toán lập phương trình mặt phẳng (P) thỏa mãn 1 số điều kiện: (P) đi qua 1 điểm, hoặc (P) chứa 1 đường thẳng hoặc (P) song song với 2 đường thẳng… và (P) tiếp xúc với một mặt cầu (S).

Phương pháp: Lập phương trình mặt phẳng (P) thỏa mãn một số điều kiện nào đó, sau đó cho mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng bán kính của mặt cầu (S). Do bài toán lập phương trình mặt phẳng đã trình bày ở phần II nên dưới đây xin nêu một số bài tập liên quan đến tiếp diện của mặt cầu (S).

Bài 22: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d:

$$\begin{cases} x = -10+10t \\ y = -10+8t \quad (t\in R) \\ z = t \end{cases}$$

Và (P) tiếp xúc với mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6y+4z-15+2x=0$

Bài giải

(S): $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2 = 29$. Mặt cầu (S) có tâm I(–1; 3; –2) và bán kính R = $\sqrt{29}$

Mặt phẳng (P) có phương trình: $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d nên (P) chứa 2 điểm A(0; –2; 1) và B(–10; –10; 0) của đường thẳng d ta được A, B ∈ (P) nên có hệ phương trình: $\begin{cases} -10A-10B+D=0 \\ -2B+C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=10A+10B \\ C=-10A-8B \end{cases}$

Vậy (P) có dạng: $Ax+By-(10A+8B)z+10A+10B=0$ (với $A^2+B^2>0$).

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên d(I; (P)) = R

$$\Leftrightarrow \frac{29|A+B|}{\sqrt{A^2+B^2+(10A+8B)^2}} = \sqrt{29} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=-\dfrac{3}{4}B \\ A=-\dfrac{2}{3}B \end{array}\right.$$

Với $A=-\dfrac{3}{4}B$ chọn B = –4 được A = 3

Với $A=-\dfrac{2}{3}B$ chọn B = –3 được A = 2

Như vậy ta được 2 mặt phẳng (P) phải lập có phương trình là:

$$3x - 4y + 2z - 10 = 0$$

hoặc: $2x - 3y + 4z - 10 = 0$

Bài 23: Cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và 2 đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình d_1: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$; d_2: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$

Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2, đường thẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Bài giải

– Mặt cầu (S) có tâm I(1; –1; 0) và bán kính $R = \sqrt{11}$

– Lập phương trình mặt phẳng (P) song song đồng thời với d_1 và d_2, (P) nhận VTCP của d_1 là $\vec{a} = (1; 1; 2)$ và $\vec{b} = (1; 2; 1)$ là VTCP của d_2 làm cặp VTCP nên (P) nhận $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-3; 1; 1)$ làm 1 VTPT:

(P) có dạng: $-3x + y + z + D = 0$

– Tìm D để (P) là tiếp diện của mặt cầu (S) khi và chỉ khi d(I, (P)) = R

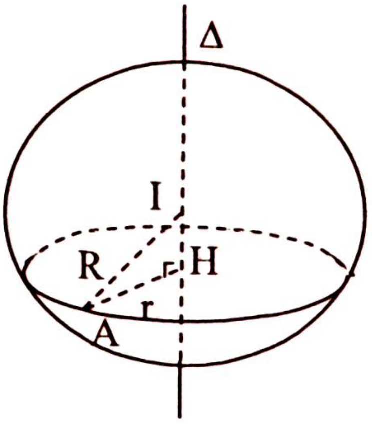
$$\Leftrightarrow \frac{|-3-1+D|}{\sqrt{9+1+1}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow |D-4| = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D-4=11 \\ D-4=-11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=15 \\ D=-7 \end{array}\right.$$

Thay D tìm được vào phương trình mặt phẳng (P) ta được 2 mặt phẳng (P) có phương trình là: $\left[\begin{array}{l} -3x+y+z+15=0 \\ -3x+y+z-7=0 \end{array}\right.$

Bài toán 4:

Xác định tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) với mặt phẳng (P)

Phương pháp giải (Hình 36)



Hình 36

– Xác định tâm I và bán kính của mặt cầu (S)

– Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm I và Δ ⊥ mặt phẳng (P)

– Tìm H = Δ ∩ (P)

– Tìm IH = d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P)

– H là tâm của đường tròn giao tuyến (T)

– r = AH bán kính của đường tròn (T), $A \in (S)$

– IA = R: Bán kính của mặt cầu (S)

– Đường thẳng Δ gọi là trục của trường tròn giao tuyến (T)

Bài 24: Cho đường tròn (T) là giao tuyến của mặt cầu (S):

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=5$$

với mặt phẳng (P): $x-2y+2z+1=0$

a) Xác định tâm H và bán kính của đường tròn (T)

b) Lập phương trình mặt cầu (S') có tâm nằm trên mặt phẳng (Q) và (S') chứa đường tròn (T). Với phương trình mặt phẳng (Q): $x+y+z=0$

Bài giải

a) – Mặt cầu (S) có tâm I(2; –3; –3) và bán kính $R=\sqrt{5}$

– Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua I và Δ ⊥ mặt phẳng (P): Δ nhận $\overrightarrow{n}=(1;-2;2)$ và VTPT của (P) làm 1 VTCP

Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x=2+t & (1)\\ y=-3-2t & (2)\\ z=-3+2t & (3)\end{cases}$

– Δ ⊥ (P): $x-2y+2z+1=0$ (4) tại điểm H. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình (1), (2), (3), (4). Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta được 1 nghiệm duy nhất: $x=\frac{5}{3};y=-\frac{7}{3};z=-\frac{11}{3}$.

Ta được tọa độ điểm $H\left(\frac{5}{3};-\frac{7}{3};-\frac{11}{3}\right)$ là tâm của đường tròn (T)

– Bán kính của đường tròn (T) là $r=HA=\sqrt{IA^2-IH^2}=\sqrt{5-1}\Leftrightarrow r=2$

b) Mặt cầu (S') chứa đường tròn (T) nên tâm J của (S') nằm trên trục Δ và J nằm trong mặt phẳng (Q), vậy tọa độ của điểm J là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x=2+t\\ y=-3-2t\\ z=-3+2t\\ x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=6\\ y=-11\\ z=5\end{cases}$

Với J(6; –11; 5) bán kính của mặt cầu (S') là $R'=\sqrt{JH^2+r^2}$

Tính $JH=\sqrt{\left(6-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-11+\frac{7}{3}\right)^2+\left(5+\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{3}+\frac{26^2}{9}+\frac{26^2}{9}}=13$

Vậy $R'=\sqrt{169+4}=\sqrt{173}$

Vậy phương trình của (S'): $(x-6)^2+(y+11)^2+(z-5)^2=173$

Bài 25: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và (Q) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3

(Đề thi đại học khối B năm 2007)

Bài giải

– Mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$ có tâm I(1; –2; –1) và bán kính R = 3

– Mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) có bán kính r = 3 = R. Vậy (Q) là mặt phẳng xuyên tâm, tức (Q) đi qua điểm I và (Q) chứa Ox nên (Q) nhận $\overrightarrow{OI} = (1; -2; -1)$ và VTCP của Ox là $\vec{i} = (1; 0; 0)$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n} = \left[\vec{i}.\overrightarrow{OI}\right] = (0; -1; 2)$ làm 1 VTPT

(Q) có phương trình là: $0(x - 1) - (y + 2) + 2(z + 1) = 0 \Rightarrow -y + 2z = 0$

Bài 26: Cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$

và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó

(Đề thi đại học năm 2009 – Ban A)

Bài giải

– Mặt cầu (S): có tâm I(1; 2; 3) và bán kính R = 5

– Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P)

$$d(I; (P)) = \frac{|2 - 4 - 3 - 4|}{3} = 3 < R$$

Vậy mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T)

– Gọi r bán kính của đường tròn (T). H là tâm của đường tròn (T)

+ H là hình chiếu của I trên (P) nên IH = d(I; (P)) = 3

Vậy $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$

+ Tìm tọa độ điểm H: lập phương trình đường thẳng Δ đi qua I và Δ vuông góc với (P). Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = 2 - 2t & (2) \\ z = 3 - t & (3) \end{cases}$

Δ ⊥ (P) tại H: (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ (4)

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình (1), (2), (3), (4)

Giải hệ (1), (2), (3), (4) tìm được H(3; 0; 2)

Bài toán 5:
Một số bài toán khác về mặt cầu

Bài 27: Cho mặt cầu (S): $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z+\frac{7}{3}\right)^2=\frac{8}{3}$ và điểm A (0; 0; –3

B (2; 0; –1) tìm tọa độ điểm C trên mặt cầu (S) để tam giác ABC đều.

Bài giải

Gọi điểm C(x_0; y_0; z_0) nằm trên mặt cầu (S) để tam giác ABC đều ta phả có

$$\begin{cases} C\in(S) \\ CA=AB \\ CB=AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_0-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y_0+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z_0+\frac{7}{3}\right)^2=\frac{8}{3} \\ x_0^2+y_0^2+(z_0+3)^2=8 \\ (x_0-2)^2+y_0^2+(z_0+1)^2=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-8x_0+4y_0+14z_0=-15 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2+6z_0=-1 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2-4x_0+2z_0=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1-z_0 \\ y_0=-5-z_0 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2+6z_0=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1-z_0 \\ y_0=-5-z_0 \\ z_0^2+6z_0+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=-2 \\ z_0=-3 \end{cases}$$

Ta tìm được 1 điểm C thỏa mãn yêu cầu của bài toán: C(2; –2; –3)

Chú ý: Có thể tìm điểm C để ΔABC vuông; cách làm tương tự khi giả ΔABC đều

Bài 28: Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-1=0$

a) Cho điểm A(1; 0; 0). Tìm điểm M ∈ (S) sao cho MA đạt giá trị lớn nhấ nhỏ nhất

b) Với điểm A(1; 1; 0). Tìm điểm M ∈ (S) sao cho MA lớn nhất, nhỏ nhất

Bài giải

a) Với điểm A(1; 0; 0) thì PA/(S) = 0. Ta được A ∈ (S)

Lấy điểm A ≡ M. Tức M(1; 0; 0) ∈ (S) thì MA = 0. Khi đó MA đạt gi trị nhỏ nhất.

– Lấy điểm M đối xứng với điểm A qua tâm O(0; 0; 0) của mặt cầu t được M(–1; 0; 0) thì MA = 2. Thì điểm M ∈ (S) có MA lớn nhất (đườn kính của mặt cầu (S) là dây lớn nhất của (S))

b) Với điểm A(1; 1; 0) ta được PA/(S) = 1 > 0. Chứng tỏ điểm A nằm ngoa mặt cầu (S)

– Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua 2 điểm A, 0 dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = t & (1) \\ y = t & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases} \quad (t \in R)$

(S): $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (4)

Δ cắt (S) tại 2 điểm M_1, M_2, tọa độ M_1, M_2 là nghiệm của hệ phương trình (1), (2), (3), (4). Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta được

$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right) \in (S)$ ta được $M_1A = \sqrt{2} - 1$

$M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right) \in (S)$ thì $M_2A = \sqrt{2} + 1$

Như vậy tìm được điểm $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right) \in (S)$ thì M, A ngắn nhất và

$M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right) \in (S)$ thì M_2A dài nhất

ài 29: Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S). Tìm điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất, nhỏ nhất

Phương pháp giải

ước 1:

– Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S) là R

– Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P): d(I; P) = d

– Lập phương trình đường thẳng Δ: đi qua điểm I và Δ vuông góc với mặt phẳng (P)

– Tìm tọa độ 2 giao điểm M_1, M_2 của Δ và mặt cầu (S)

ước 2: Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) có các trường hợp sau:

rường hợp 1: d = R ⇔ (P) là tiếp diện của mặt cầu (S) khi đó một trong 2 điểm M_1, M_2 là tiếp điểm

– Chẳng hạn M_1 là tiếp điểm thì $d(M_1; (P)) = 0$.

Vậy $M_1 \in (S)$ thì $d(M_1; (P)) = 0$ là nhỏ nhất

– M_2 là điểm xuyên tâm đối của mặt cầu: $M_1M_2 = 2R$

$d(M_2; (P)) = 2R$, $M_2 \in (S)$ thì $d(M_2; (P))$ là lớn nhất

rường hợp 2: d(I; (P)) = d < R ⇔ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T)

– Mọi điểm M ∈ đường tròn (T) thì d(M; (P)) = 0. Vậy tập hợp những điểm M ∈ (T) = (S) ∩ (P) thì d(M; (P)) = 0 là nhỏ nhất.

– Tính $d(M_1; (P)) = d_1$, $d(M_2; (P)) = d_2$

– $\text{Max}\,\{d_1; d_2\} = \text{Max}\,\{M; (P)\}$

Trường hợp 3: $d > R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \varnothing$

– Tính $d_1 = d(M_1; (P))$; $d_2 = d(M_2; (P))$

– $\text{Max } d\{M, (P))\} = \text{Max}\{d_1, d_2\}$

– $\text{Min } d(M, (P)\} = \text{Min}\{d_1; d_2\}$

Trường hợp đặc biệt: (P) là mặt phẳng xuyên tâm tức là mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu (S) thì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn của mặt cầu (S). Vậy mọi điểm nằm trên đường tròn lớn đều có khoảng cách từ M đến (P) bằng 0 là nhỏ nhất. Còn $d(M_1; P) = d(M_2; P) = R$ thì M_1, M_2 là 2 điểm nằm trên mặt cầu (S) có khoảng cách đến (P) là lớn nhất bằng R.

Bài 30: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x - 2y + z + 6 = 0$. Tìm điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất, nhỏ nhất

Bài giải

– Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$ và bán kính $R = 2$

– Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P): $d(I; (P)) = \frac{7}{3} > R$ vậy mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) (trường hợp 3)

– Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm I, $\Delta \perp (P)$ cho nên Δ nhận $\vec{n} = (2; -2; 1)$ là VTPT của (P) làm 1 VTCP

Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \quad (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$

– Tìm tọa độ giao điểm của Δ với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t - 1 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{3}; y = -\frac{4}{3}; z = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3}; y = \frac{4}{3}; z = -\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Được 2 giao điểm của Δ với (S) là:

$M_1\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

– Tính $d_1 = d(M_1; (P)) = \frac{13}{3}$; $d_2 = d(M_2; P) = \frac{1}{3}$

Vậy $\text{Max}\{M; (P)\} = d_1$, $\text{Min}\{M; (P)\} = d_2$

Do đó với $M_1\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right) \in (S)$ thì $d(M; (P))$ là lớn nhất

$M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right) \in (S)$ thì $d(M_2; (P))$ là nhỏ nhất

Bài 31: Trong các số thực x, y, z thỏa mãn hệ thức:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1\ (1).$$

Hãy tìm x, y, z để $F=|x+2y+3z-8|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất của F

Bài giải

Do x, y, z thỏa mãn (1) nên. Gọi điểm M(x; y; z) thỏa mãn (1) thì M nằm trên mặt cầu (S) tâm I(1; 2; 1) bán kính của mặt cầu (S) là R = 1. Gọi (P) là mặt phẳng có phương trình: $x+2y+3z-8=0$. Thay tọa độ điểm I vào phương trình (P) thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) vậy tâm I của mặt cầu (S) nằm trong mặt phẳng (P) nên (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn. Nếu ta gọi điểm M(x; y; z) nằm trên mặt cầu (S) tức là x, y, z thỏa mãn (1) để F lớn nhất. Tức là tìm điểm M ∈ (S) để d(M; P) là lớn nhất

– Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua I, Δ ⊥ (P)

Phương trình tham số của Δ $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \quad (t\in R) \\ z=1+3t \end{cases}$

– Tìm giao điểm của Δ với mặt cầu (S) ta được 2 điểm:

$$A\left(1+\frac{1}{\sqrt{14}};2+\frac{2}{\sqrt{14}};1+\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\in(S)$$

$$B\left(1-\frac{1}{\sqrt{14}};2-\frac{2}{\sqrt{14}};1-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\in(S)$$

Thì d(A; (P)) = d(B; (P)) = 1 là lớn nhất

Tức $\frac{|x+2y+3z-8|}{\sqrt{14}}=1 \Leftrightarrow |x+2y+3z-8|=\sqrt{14}$ tức là

MaxF = max|x + 2y + 3z – 8)| = $\sqrt{14}$ là lớn nhất

Trong tất cả các điểm M ∈ (S)

Do đó MaxF $=\sqrt{14}$ đạt được khi

$$\left[\begin{array}{l} x=1+\frac{1}{\sqrt{14}};y=2+\frac{2}{\sqrt{14}};z=1+\frac{3}{\sqrt{14}} \\ x=1-\frac{1}{\sqrt{14}};y=2-\frac{2}{\sqrt{14}};z=1-\frac{3}{\sqrt{14}} \end{array}\right.$$

Bài tập tự luyện tập về mặt cầu

Bài 32: Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A(0; 1; 0), B(1; 0; 0), C(0; 0; 1) và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$

Bài 33: Lập phương trình mặt cầu đi qua 2 điểm A(3; 1; 0) và B(5; 5; 0), Tâm I của mặt cầu nằm trên trục hoành

Bài 34: Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC biết:

S(3; 1; −2), A(5; 3; −1), B(2; 3; −4), C(1; 2; 0)

Bài 35: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là gốc tọa độ và mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P): $16x - 15y - 12z + 75 = 0$

Bài 36: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng Δ:

$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ $(t \in R)$ và (S) tiếp xúc với 2 mặt phẳng (P_1) và (P_2)

(P_1): $3x + 4y + 3 = 0$

(P_2): $2x + 2y - z + 39 = 0$

Bài 37: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; −1) và tiếp xúc với đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$ $(t \in R)$

Bài 38: Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 3; 2) và (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r = 1.

Bài 39: Cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu (S):
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 27 - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng (P): $3x - 2y + 6z + 14 = 0$.
Hãy xác định tâm H và bán kính r của đường tròn giao tuyến đó.

Bài 40: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) và chứa đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 1 \end{cases}$ $(t \in R)$

Bài 41: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$ và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in R)$. Tìm tọa độ điểm M ∈ (S) sao cho d(M; d) là nhỏ nhất?

Bài 42: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$. Tìm điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất

(Đề thi Đại học khối B – 2007)

Bài 43: Cho điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P): $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A; B; C và có tâm thuộc mặt phẳng (P)

(Đề thi đại học năm 2004 – D)

Hướng dẫn giải bài tập về mặt cầu

Bài 32: Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm của mặt cầu qua A, B, C và $I \in (P)$ như vậy I cách đều 3 điểm A, B, C. Ta được $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ I \in (P) \end{cases}$ giải hệ $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ và được I(1; 1;1) bán kính $R = IA = \sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$

Bài 33: Gọi tâm I của mặt cầu trên trục hoành $I(x_0; 0; 0)$ và đi qua 2 điểm A, B nên $IA^2 = IB^2$ giải phương trình tìm được điểm I(10; 0; 0) và bán kính $R = IA = \sqrt{50}$. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-10)^2 + y^2 + z^2 = 50$

Bài 34: Phương trình mặt cầu phải lập: $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 7y + 3z + 14 = 0$

Bài 35: Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Bài 36: Gọi tâm $I(t; 0; -1) \in d$ vì (S) tiếp xúc với 2 mặt phẳng (P_1) và (P_2) nên $d(I; (P_1)) = d(I; (P_2))$.

Giải hệ phương trình được $t_1 = -11$ và $t_2 = -191$

$t_1 = -11$ ta được mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(-11; 0; -1)$ bán kính $R_1 = 6$

$t_2 = -191$ ta được mặt cầu (S_2) tâm $I_2(-191; 0; -1)$ bán kính $R_2 = 112$

Đáp số có 2 mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn yêu cầu của bài toán:

(S_1): $(x+11)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 36$; (S_2): $(x+191)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 112^2$

Bài 37: Bán kính của mặt cầu (S), $R = d(I; d) = \sqrt{6}$

Phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$

Bài 38: Giả sử mặt cầu (S) thỏa mãn điều kiện bài toán (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

Vì A, B, C ∈ (S) ta được $\begin{cases} 1 - 2a + d = 0 \\ 1 - 2b + d = 0 \\ 13 - 6b - 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2a - 1 \\ b = a \\ c = 3 - a \end{cases}$ (1)

– Gọi d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) ta được:

$$d = d(I; (P)) = \frac{|2a + 2b + c|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|2a + 2b + c|}{3}$$

– Ta có $(Q) \cap (S)$ theo giao tuyến là đường tròn (T) có bán kính $r = 1$, ta có: $R^2 = r^2 + d^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + \left(\frac{2a + 2b + c}{3}\right)^2$

Do (1) $\Leftrightarrow a^2 + a^2 + (3 - a)^2 - (2a - 1) = 1 + \left(\frac{2a + 2a + 3 - a}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 4 \end{array}\right.$

Với a = 1 ta được b = 1, c = 2, d = 1

Với a = 4 ta được b = 4, c = 1, d = 7

Được 2 mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình là:

(S_1): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 1 = 0$

(S_2): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y + 2z + 7 = 0$

Bài 39: Đáp số $H\left(0; \frac{5}{3}; -1\right)$ và bán kính r = 4

Bài 40: Mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu bài toán c phương trình: $2x - y - 2z + 1 = 0$

Bài 41: M (2; 2; –1)

Bài 42: Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) cắt (P) tại H, c cắt mặt cầu tại 2 điểm A và B

– Phương trình đường thẳng d qua I và nhận VTPT của (P) làm VTCP:

d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$

– Tìm tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = -1, z = -3 \\ x = 3, y = -3, z = 1 \end{array}\right.$$

– Tính d(A; (P)) = 7, d(B; (P)) = 1

Vậy Maxd (M; (P)) = 7 khi M ≡ A(–1; –1; –3)

Bài 43:

Cách 1: $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm mặt cầu (S) theo giả thuyết $I \in (P)$ và IA = IB = IC

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 2 \\ IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$

Bán kính mặt cầu IA = R = 1

Phương trình mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$

Cách 2: Viết phương trình mặt cầu (S): $(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = R^2$

Với tâm I(–a; –b; –c) và bán kính mặt cầu R cho (S) đi qua A, B, C và $I \in (P)$

Giải hệ tìm được a = –1, b = 0, c = –1, R = 1

Ta cũng được kết quả như cách 1.

PHẦN VIII. MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP

A. Tam giác trong không gian

I. Cho tam giác ABC, biết tọa độ của các đỉnh A, B, C

1. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC

Áp dụng bài toán lập phương trình đường thẳng qua 2 điểm để lập phương trình các cạnh của ΔABC đã nêu ở phần III.

2. Lập phương trình của đường trung tuyến của tam giác ABC. Tìm trọng tâm G của tam giác ABC

– Lập phương trình đường trung tuyến. Chẳng hạn là trung tuyến AM

+ Tìm tọa độ điểm A (nếu bài toán chưa cho)

+ Tìm điểm M là trung điểm của BC

+ Lập phương trình trung tuyến AM qua 2 điểm A và M

– Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

Cách 1: Áp dụng công thức $\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) \end{cases}$

Cách 2:

+ Lấy M là trung điểm của 1 cạnh chẳng hạn của BC. Tìm tọa độ điểm M.

+ Trên AG lấy điểm G sao cho $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ thì G là trọng tâm của ΔABC. Giải phương trình $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$. Tìm tọa độ điểm G.

Cách 3:

– Lập trung tuyến AM

– Lập trung tuyến BN

– Tìm $G = AM \cap BN$

Bài 1: Cho tam giác ABC, biết A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5)

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Lập phương trình đường trung tuyến của ΔABC kẻ từ A.

c) Tìm điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài giải

a) Áp dụng công thức tìm trọng tâm G nêu ở cách 1 ta được $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$

b) – Gọi M là trung điểm của BC, M(–1; 3; 4)

– Lập trung tuyến AM. Ta có $\overrightarrow{AM} = (-2; 1; 5)$

Phương trình trung tuyến AM dạng chính tắc có dạng:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{5}$$

(Hoặc là lập trung tuyến AM đi qua A, G)

c) ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ta có $\overrightarrow{BC}=(-6;\ 8;\ 2)$ gọi điểm $D(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ta được $\overrightarrow{AD}=(x_0-1;\ y_0-2;\ z_0+1)$

Vậy $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-1=-6\\y_0-2=8\\z_0+1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-5\\y_0=10\\z_0=1\end{cases}$

Ta được D(−5; 10; 1)

Bài 2: Cho tam giác ABC với A(1; 2; 5) và 2 đường trung tuyến có phương trình d_1: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-1}{1}$ và d_2: $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-2}{1}$

Hãy lập phương trình 3 cạnh của tam giác ABC

Bài giải

– Thay tọa độ điểm A và phương trình 2 đường thẳng d_1, d_2 đều không thỏa mãn vậy d_1, d_2 không đi qua điểm A.

Giả sử d_1 đi qua B và d_2 đi qua C.

Phương trình đường trung tuyến BB_1 là: $\begin{cases}x=3-2t\\y=6+2t\quad(t\in R)\\z=1+t\end{cases}$

Phương trình đường trung tuyến CC_1: $\begin{cases}x=4+t'\\y=2-4t'\quad(t'\in R)\\z=2+t'\end{cases}$

– Trên d_1 lấy điểm B(3 − 2t; 6 + 2t; 1 + t) di động trên d_2 lấy điểm C(4 + t'; 2 − 4t'; 2 + t') di động.

– d_1 cắt d_2 tại điểm G là trọng tâm của tam giác ABC; tìm điểm G(3; 6; 1)

– Tìm B, C để ΔABC nhận G làm trọng tâm.

+ Tính $\overrightarrow{GA}=(-2;-4;4)$, $=(-2t;2t;t)$, $\overrightarrow{GC}=(1+t';-4-4t';1+t')$

+ Giải phương trình: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ giải phương trình này tìm được $t=-2$; $t'=-3$. Ta được: B(7; 2; −1) và điểm C(1; 14; −1).

– Lập phương trình 3 cạnh của tam giác ABC biết 3 đỉnh được kết quả

phương trình cạnh BC: $\begin{cases}x=7-t_1\\y=2+2t_1\quad(t_1\in R)\\z=-1\end{cases}$

Và phương trình 2 cạnh AB và AC có dạng: $\begin{cases} x = 1 + t_2 \\ y = 2 \\ z = 5 - t_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 14 - 2t_3 \\ z = -1 + t_3 \end{cases}$

$(t_2, t_3 \in R)$

3. Tính chu vi, diện tích, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, các góc của tam giác ABC

– Tính độ dài 3 cạnh của ΔABC: AB, AC, BC

– Tính chu vi của tam giác ABC: 2p = AB + AC + BC

– Tính diện tích của tam giác ABC = S

+ áp dụng công thức: $S = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right]\right\|$, $S = Pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{P}$

Hoặc công thức: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \ldots$

(Nếu thuận tiện thì áp dụng một trong 5 công thức tính diện tích của tam giác)

– Tính góc của tam giác ABC

+ Hoặc áp dụng $\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

+ Hoặc áp dụng định lý hàm số côsin cho ΔABC

4. Tính độ dài đường cao của ΔABC, tìm trực tâm H của tam giác – lập phương trình đường cao

– Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến một đường thẳng để tính độ dài đường cao của tam giác.

– Lập phương trình đường cao AA'

Cách 1:

+ Tìm điểm A' là hình chiếu của A trên cạnh BC (3 cách tìm điểm A')

+ Lập phương trình đường cao AA' đi qua A và A'

Cách 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (ABC)

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và (P) ⊥ BC

– Tìm giao tuyến của (P) và (ABC) chính là đường cao AA' của ΔABC

– Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC

Cách 1: H là trực tâm của ΔABC ta được: $\begin{cases} H \in (ABC) \\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ giải hệ phương trình tìm tọa độ của điểm H.

Cách 2:

– Có thể lập phương trình của 2 đường cao AA' và BB'

– Tìm $H = AA' \cap BB'$.

Bài 3: Cho tam giác ABC biết A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5) lập phương trình đường cao AA'

Bài giải

Cách 1:

– Tìm A' là hình chiếu của A trên BC (tìm A' theo 1 trong 3 cách)

Ta được $A'\left(\frac{19}{26};\frac{18}{26};\frac{89}{26}\right)$

– Lập véc tơ $\overrightarrow{AA'}=\left(-\frac{7}{26};-\frac{34}{26};\frac{115}{26}\right)$ chọn véc tơ chỉ phương của AA' là véc tơ $\vec{a} = (-7; -34; 115)$

– Lập phương trình đường cao AA' là đường thẳng đi qua đỉnh A và nhận $\vec{a}$ làm VTCP có phương trình: $\frac{x-1}{-7}=\frac{y-2}{-34}=\frac{z+1}{115}$

Cách 2:

– Lập phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua 3 điểm A, B, C

$$(ABC): 19x + 13y + 5z - 40 = 0$$

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và (P) ⊥ BC, mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{BC}$ làm VTPT

Phương trình (P): $-3x + 4y + z - 4 = 0$

– Mặt phẳng (P) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến AA': AA' ⊥ BC và cắt BC nên giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (ABC) chính là đường cao AA' có phương trình: $\begin{cases}19x+13y+5z-40=0\\-3x+4y+z-4=0\end{cases}$

5. Lập phương trình đường phân giác trong của ΔABC

Chẳng hạn lập phân giác trong của góc A là AD có thể lựa chọn trong các cách sau:

Cách 1:

– Tìm điểm D sao cho $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{AB}{AC}$ (1)

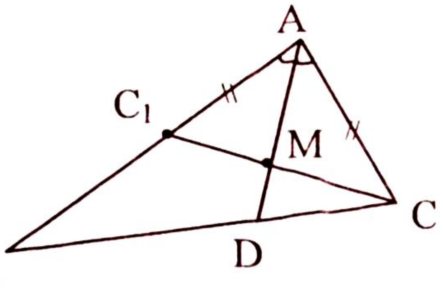
+ Tính AB, AC tìm tỷ số $-\frac{AB}{AC}$

+ Tính véc tơ $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$

+ Giải phương trình (1), tìm tọa độ điểm D

– Lập phương trình đường thẳng qua AD chính là đường phân giác trong của góc A.

Cách 2:



– Trên AB đặt $AC_1 = AC$

+ Lập phương trình tham số của AB

+ Tính AC

+ Tìm $C_1 \in AB$ sao cho:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AC} \text{ cùng hướng} \\ AC_1 = AC \end{cases}$$

– ΔACC_1 cân đỉnh A. Lấy M trung điểm của CC_1

Do ΔACC_1 cân đỉnh A nên AM là phân giác trong của góc A. Lập phương trình đường thẳng qua AM chính là phương trình đường phân giác trong của góc A của ΔABC.

Bài 4: Cho tam giác ABC biết A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5) lập phương trình phân giác trong của góc B của tam giác ABC

Bài giải

Cách 1: Kẻ phân giác trong của góc B là BD ta được $\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} = -\frac{BC}{BA}$

Tính $BC = 2\sqrt{26}$, $BA = \sqrt{26}$

+ $-\frac{BC}{BA} = -2$

+ $\overrightarrow{DC} = (-4 - x_D; 7 - y_D; 5 - z_D)$

+ $\overrightarrow{DA} = (1 - x_D; 2 - y_D; -1 - z_D)$

– Giải phương trình: $\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} = -2 \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA}$

Ta tìm được tọa độ điểm $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$

– Lập phương trình phân giác trong của góc B chính là đường thẳng đi qua 2 điểm B, D có phương trình: $\left(\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-3}{3}\right)$

Cách 2:

– Tính $BA = \sqrt{26}$

– Lập phương trình tham số BC: $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 4t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$ $(t \in R)$

– Trên BC lấy điểm $A_1(-3t + 2; 4t - 1; t + 3)$ sao cho $BA_1 = BA$

$\Leftrightarrow BA_1^2 = BA^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 16t^2 + t^2 = 26$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$

Với t = 1 ta được $A_1(-1; 3; 4)$ thì $\overrightarrow{BA_1} = (-3; 4; 1) = \overrightarrow{BC}$

Vậy với $A_1(-1; 3; 4)$ thì A_1 và C cùng phía nên ΔBA_1A cân đỉnh B. Lấy M trung điểm của AA_1. $M\left(0; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$

– Phương trình phân giác trong của góc B là đường thẳng BM

$\overrightarrow{BM} = \left(-2; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ chọn $\vec{a} = (4; -7; 3)$ là VTCP của BM.

Phương trình phân giác trong góc B: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-3}{3}$

t = –1 thì điểm A_1 và C khác phía không thỏa mãn.

Bài 5: Cho tam giác ABC, biết C(3; 2; 3) và phương trình đường cao AH: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và đường phân giác trong góc B là BM: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC

Bài giải

Gọi phương trình đường cao AH: d_1: $\begin{cases} x = 2 + t_1 \\ y = 3 + t_1 \quad (t_1 \in R) \\ z = 3 - 2t_1 \end{cases}$

Phương trình đường trung tuyến BM là d_2: $\begin{cases} x = 1 + t_2 \\ y = 4 - 2t_2 \quad (t_2 \in R) \\ z = 3 + t_2 \end{cases}$

– Lấy điểm A trên d_1: $A(2 + t_1; 3 + t_2; 3 - 2t_1)$

Điểm $B \in d_2$: $B(1 + t_2; 4 - 2t_2; 3 + t_2)$

– Xác định tọa độ của đỉnh B

+ $\overrightarrow{CB} = (t_2 - 2; 2 - 2t_2; t_2)$, VTCP của AH là: $\vec{u} = (1; 1; -2)$

+ Vì $AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t_2 = 0$

Ta được điểm B(1; 4; 3)

– Xác định tọa độ điểm A

Ta có $\overrightarrow{BA} = (1 + t_1; t_1 - 1; -2t_1)$. Véc tơ chỉ phương của BM là:

$\vec{v} = (1; -2; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -2; 0)$

BM là phân giác trong góc B khi và chỉ khi

$$\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right) = \cos\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1(t_1+1) - 2(-1+t_1) + 1(-2t_1)}{\sqrt{(1+t_1)^2 + (t_1-1)^2 + (-2t_1)^2}} = \frac{1.2 - 2(-2) + 1.0}{\sqrt{4+4}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_1 = 1 \end{array}\right.$$

+ Với t = 0 ta được điểm A(2; 3; 3) ta được $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -1; 0)$. Ta được $\overrightarrow{AB} = -1\,\overrightarrow{AC}$

Nên A, B, C thẳng hàng, điểm A(2; 3; 3) không thỏa mãn.

+ Với t = −1 được điểm A(1; 2; 5) ta được $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không thẳng hàng, thỏa mãn. Với A(1; 2; 5), B(1; 4; 3) và C(3; 2; 3) ta được $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $CA = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ Tam giác ABC đều

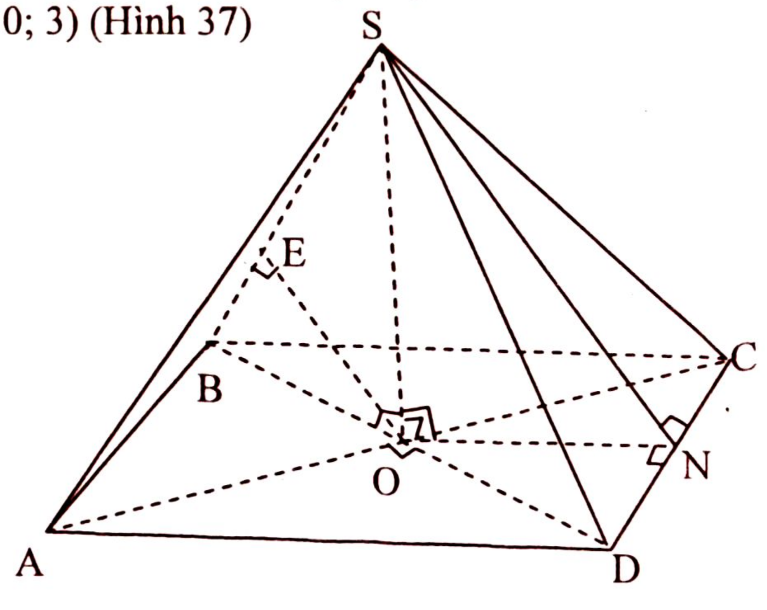
Bài 6 (Bài tập tự luyện)

Cho 3 điểm A(2; −1; 3), B(4; 0; 1), C(−10; 5; 3)

1. Chứng minh rằng A, B, C là 3 đỉnh của 1 tam giác
2. Tính các góc của tam giác ABC
3. Tính diện tích, chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC
4. Tìm điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành
5. Lập phương trình 3 cạnh của tam giác ABC
6. Lập phương trình các đường trung tuyến của tam giác ABC. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC
7. Lập phương trình đường cao AA' và tìm trực tâm H của tam giác ABC
8. Lập phương trình phân giác trong của góc A của tam giác ABC
9. Tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC (hướng dẫn: giải hệ phương trình $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ H \in mp(ABC) \end{cases}$
10. Chứng minh 3 điểm G, H, I thẳng hàng
11. Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm B đến AC
12. Tìm điểm A' đối xứng với A qua BC

B. Một số bài tập về khối đa diện

Bài 7: Trong hệ trục Oxyz cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết S(3; 2; 4), B(1; 2; 3), D(3; 0; 3) (Hình 37)



Hình 37

1. Tính thể tích của hình chóp

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO$ (diện tích ABCD)

+ Tính SO: Do O là tâm hình vuông ABCD nên O(2; 1; 3)

Vậy $SO = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

+ Diện tích $ABCD = \frac{1}{2}BD^2 = \frac{1}{2}.8 = 4$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.\sqrt{3}.4 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

2. Tính góc giữa mặt bên với mặt đáy của hình chóp

Vì SABCD là hình chóp đều, nên các mặt bên đều tạo với mặt phẳng đáy những góc bằng nhau. Lấy N là trung điểm của CD, vì $(SCD) \cap (ABCD) = CD$ mà $SN \subset (SCD)$ mà $SN \perp CD$ (do ΔSCD cân), $ON \subset (ABCD)$, $ON \perp CD$ nên góc giữa (SCD) với (ABCD) là $\widehat{SNO}$

ΔSON vuông tại O ta có $\tan\widehat{SNO} = \frac{SO}{ON}$

Vì $BD = 2\sqrt{2}$ nên $CD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = 2$. Vậy $ON = \frac{CD}{2}\frac{CD}{2} = 1$

Nên $\tan\widehat{SNO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{SNO} = 60^0$

Do đó các mặt bên của hình chóp tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0

3. Tính góc giữa các cạnh bên và mặt phẳng đáy hình chóp

Trong hình chóp đều, các cạnh bên đều tạo với mặt phẳng đáy những góc bằng nhau và bằng $\widehat{SNO} = \alpha$ (nhọn)

ΔSBO vuông tại O (do $SO \perp (ABCD)$) ta có $SO = \sqrt{3}$, $BO = \sqrt{2}$

Vậy $\tan\alpha = \frac{SO}{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Hoặc áp dụng tính α là góc nhọn giữa 2 véc tơ $\overline{BS}$ và $\overline{BO}$

4. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD

Vì SO là trục đối xứng của hình chóp đều nên mọi điểm nằm trên SO cách đều A, B, C, D. Nghĩa là tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều SABCD phải nằm trên SO và IS = IB (hoặc bằng IC, ID, IA)

– Xác định điểm I:

+ Viết phương trình tham số của SO

$$SO: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t + 1 \quad (t \in R) \\ z = t + 3 \end{cases}$$

+ Trên SO lấy điểm I(t + 2; t + 1; t + 3)

+ I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp SABCD khi và chỉ khi IS = IB $\Leftrightarrow$ $IS^2 = IB^2$. Giải phương trình này, tìm được $t = \frac{1}{6}$ được tâm I của mặt cầu ngoại tiếp SABCD là $I.\left(\frac{13}{6};\frac{7}{6};\frac{19}{6}\right)$

– Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp SABCD bằng R

$R = IS = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp SABCD có dạng:

$$\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2+\left(z-\frac{19}{6}\right)^2=\frac{25}{6}$$

5. Lập phương trình đường vuông góc chung của SB và AC

Cách 1:

Do ABCD là hình vuông, O là tâm hình vuông nên $AC \perp BD \subset (SBD)$.
$SO \perp (ABCD)$ mà AC nằm trong mặt phẳng (ABCD) nên $AC \perp SO$: SO nằm trong mặt phẳng (SBD) vậy $AC \perp (SBD)$.

Trong mặt phẳng (SBD) từ O kẻ $OE \perp SB$ ($E \in SB$) nên OE vuông góc và cắt AC tại O. Vậy OE là đường vuông góc chung của SB và AC.

– Lập phương trình EO:

+ O(2; 1; 3)

+ Tìm điểm E là hình chiếu của O trên SB (3 cách tìm điểm E) ta được

$$E\left(3;\frac{4}{5};\frac{17}{5}\right)$$

Phương trình EO là đường vuông góc chung của SB và AC có dạng:

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$$

Cách 2:

– Lập phương trình tham số của SB

– Lập phương trình tham số của AC đi qua O và AC nhận VTPT của mặt phẳng (SBD) làm VTCP

– Lấy điểm M di động trên SB, N di động trên AC. Tìm M, N để

$$\begin{cases} MN \perp SB \\ MN \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB}=0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$

Giải hệ tìm được $M\left(3;\frac{4}{5};\frac{17}{5}\right) \equiv E$, $N(2; 1; 3) \equiv O$

– Lập phương trình đường thẳng qua MN chính là đường vuông góc chung của SB và AC. Giống cách 1

Cách 3:

– Lập phương trình mặt phẳng (SBD) đi qua 3 điểm S, B, D

(SBD): $x + y - 2z + 3 = 0$

– Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua O, (P) ⊥ SB:

(P): $2y + z - 5 = 0$

– (P) ∩ (SBD) theo giao tuyến là đường vuông góc của SB và AC. Có phương trình: $\begin{cases} 2y + z - 5 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = 7 - 5t \\ y = t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$ $(t \in R)$

6. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua BI, (P) // AC (I: tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD)

– VTCP của BI là: $\vec{u} = (7; -5; 1)$, VTCP của AC là VTPT của mặt phẳng (SBD) là $\vec{v} = (1; 1; -2)$, (P) nhận $\vec{u}$ và $\vec{v}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n} = \frac{1}{3}\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = = (3; 5; 4)$ làm 1 VTPT

(P) có phương trình là: $3x + 5y + 4z - 25 = 0$

7. Gọi H là trực tâm của ΔSCD, tính độ dài đoạn OH

Tứ diện OBCS có OB ⊥ OC, OB ⊥ OS, OC ⊥ OS nên tứ diện OSBC là tứ diện vuông.

H là trực tâm của ΔSCD. Chứng minh cho OH ⊥ (SCD)

+ Do H là trực tâm ΔSCD nên SD vuông góc với CD ⊂ (OHC)

Và OC ⊥ (OSD) nên SD ⊥ OC ⊂ (COH)

Vậy SD ⊥ (OHC) nên (OHC) ⊥ (SDC)

Tương tự: (OSH) ⊥ (SDC) mà (OHC) ∩ (OSH) ≡ OH

Vậy OH ⊥ (SCD)

– Chứng minh: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2}$

Gọi C' là hình chiếu của C trên SD

ΔOCC' vuông tại O, OH là đường cao ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OC'^2}$

ΔOSD vuông tại O có OC' ⊥ SD nên $\frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2}$

Vậy (1) được chứng minh

– **Tính OH** thay $OS = \sqrt{3}$, $OD = OC = \sqrt{2}$

Vậy $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow OH^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 8: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm của cạnh bên SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BM

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại N. Tính thể tích của khối chóp SABMN.

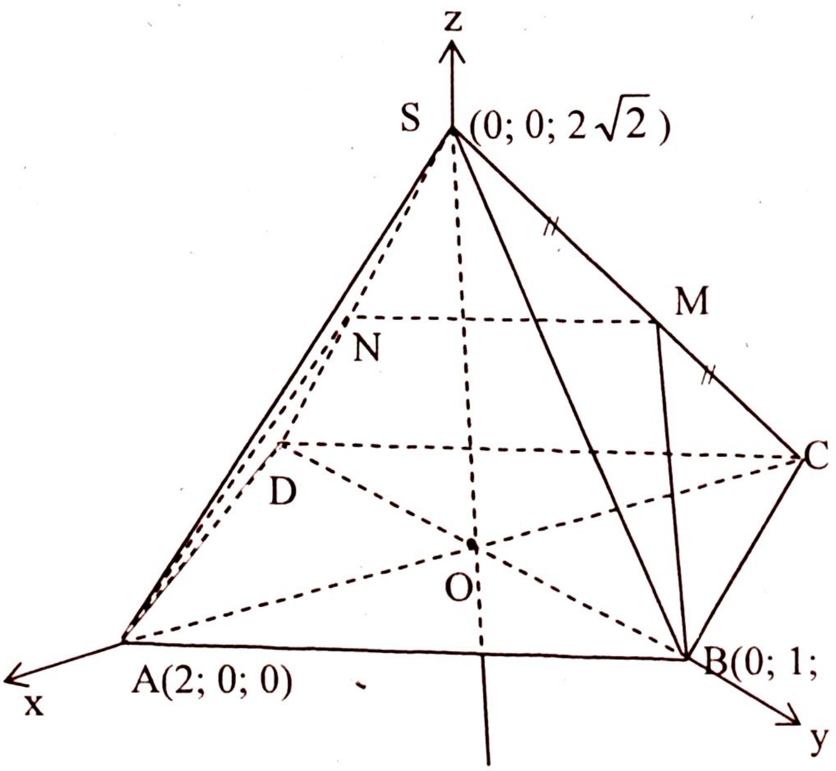
(Đề thi Đại học khối A – 2004)

Bài giải

a) – Do O là trung điểm của BD mà B(0; 1; 0) và O(0; 0; 0) nên D(0; –1; 0)

O là trung điểm của AC mà A(2; 0; 0) nên C(–2; 0; 0)

M là trung điểm của SC nên M(–1; 0; $\sqrt{2}$)



Hình 38

– Gọi α là góc nhọn giữa SA và BM

$$\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\text{ Vậy } \alpha = 30^0$$

– Ta có $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}\right] = (-2\sqrt{2};0;-2), \overrightarrow{AB} = (-2;1;0)$

Vậy khoảng cách giữa SA và BM là $d(SA; BM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}\right]\right|}$

$d(SA; BM) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (đơn vị độ dài)

b) Ta có MN // AB // CD nên N là trung điểm của SD

Ta được $N\left(0;-\frac{1}{2};-\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{SA}=(2;0;-2\sqrt{2}),\overrightarrow{SM}=(-1;0;-\sqrt{2}),\ \overrightarrow{SB}=(0;1;-2\sqrt{2})$

$\overrightarrow{SN}=\left(0;-\frac{1}{2};-\sqrt{2}\right)$

Tính $\left[\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SM}\right]=(0;4\sqrt{2};0)$

Do đó thể tích của khối tứ diện SABM = V_1

$V_1=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right]\overrightarrow{SB}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (đvtt)

Thể tích khối tứ diện SAMN: $V_2=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right]\overrightarrow{SN}\right|=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$V_{SABMN}=V=V_1+V_2=\sqrt{2}$ (đvtt)

Bài 9: Cho hình chóp ABC với S(3; 1; –2), A(5; 3; –1) , B(2; 3; –4), C(1; 2; 0)

a) Chứng minh rằng đáy ABC là tam giác đều và 3 mặt bên là các tam giác vuông cân.

b) Tìm tọa độ điểm D' đối xứng với điểm C qua AB

c) M là điểm bất kỳ thuộc mặt cầu tâm D bán kính $R=\sqrt{18}$. (Điểm M không thuộc mặt phẳng (ABC)). Xét tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài các đoạn thẳng MA, MB, MC. Hỏi tam giác đó có đặc điểm gì?

Bài giải

a) Tính $\overrightarrow{SA}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{SB}=(-1;2;-2)$, $\overrightarrow{SC}=-2;1;2)$

Ta có $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=-2+4-2=0$ nên SA ⊥ SB

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=4-2-2=0$ nên SB ⊥ SC

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=-4+2+2=0$ nên SA ⊥ SC

Và SA = SB = SC = 3, $AB=AC=BC=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

Vậy ΔABC đều, 3 mặt bên của hình chiếu SABC là 3 tam giác vuông cân đỉnh S.

b) Lấy I là trung điểm của AB. Do ΔABC đều nên CI ⊥ AB tại I. Vậy I là hình chiếu của C trên AB. $I\left(\frac{7}{2};3;-\frac{5}{2}\right)$

Vậy điểm D đối xứng với C qua AB thì I là trung điểm của DC nên D(6; 4; –5) là điểm đối xứng của C qua AB

c) Gọi điểm M(x; y; z) thuộc mặt cầu (D) tâm D, bán kính $R=\sqrt{18}$, phương trình (D): $(x-6)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=18$ (1)

Ta có: $MA^2=(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2$

$MB^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2$; $MC^2=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2$

Ta có: $MA^2 + MB^2 = (x - 5)^2 + (x - 2)^2 + 2(y - 3)^2 + (z + 1)^2 + (z + 4)^2$

Xét đẳng thức $MA^2 + MB^2 = MC^2$ (2)

$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 2y^2 + 12y + 2z^2 + 10z + 64 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8 + 16 + z^2 + 10z + 25 = 18$

$\Leftrightarrow (x - 6)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = 18.$

Đúng do (1) đúng. Điều đó chứng tỏ $M \in (D)$ thì $MA^2 + MB^2 = MC^2$

Nên MA, MB, MC là độ dài của một tam giác vuông

Chú ý: *Nếu cho hình đa diện mà việc tính toán chứng minh gặp khó khăn nhất là bài toán chứng minh quan hệ vuông góc. Tính khoảng cách, tính góc… nếu đủ các yếu tố để đặt vào hệ trục Oxyz thì lời giải thuận lợi hơn. Dưới đây là 1 số ví dụ minh họa.*

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD co đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AD = DC = a, AB = 2a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), $SA = a\sqrt{2}$

a) Tính thể tích của khối chóp SABCD

b) Tính góc giữa các cạnh bên, các mặt bên với mặt phẳng đáy của hình chóp SABCD.

c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD), từ A đến mặt phẳng (SBD).

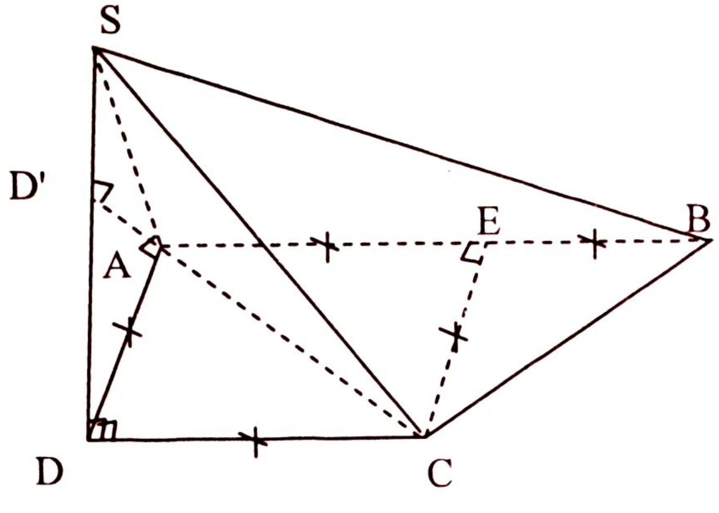
d) Dựng đường vuông góc chung của AC và SD và tính khoảng cách giữa AC và SD, AC và SB

e) Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SACD, tứ diện SDCB và tứ diện SCDE (E là trung điểm của AB)

Bài giải

Trong bài 10 (hình 39) chú ý:

Các câu: a, b, câu c tính d(A; (SCD)), câu e xác định tâm, bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SACD có thể làm trực tiếp không nhất thiết phải đặt vào hệ trục tọa độ Oxyz. Các câu còn lại nên đặt hình chóp SABCD vào hệ trục tọa độ Oxyz để việc giải toán thuận lợi hơn.



Hình 39

a) $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SA.dt\,ABCD = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{2a+a}{2}.a = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$

b) *) Góc giữa SA với (ABCD) bằng 90^0 vì SA ⊥ (ABCD)

*) Hình chiếu của cạnh SD trên đáy ABCD là AD: Do SA ⊥ (ABCD) mà DC ⊥ AD nên SD ⊥ DC

*) E là trung điểm của AB, ADCE là hình vuông cạnh a

Vậy ΔACB vuông tại C, áp dụng định lý 3 đường vuông góc ta được BC ⊥ SC

– Góc giữa SC với (ABCD) là $\widehat{SCA} = 45^0$ vì ΔSAC vuông cân đỉnh A: $AC = SA = a\sqrt{2}$

– Góc giữa SD với (ABCD) là $\widehat{SDA}: \tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{2}$

– Góc giữa SB với (ABCD) là $\widehat{SBA}$ có $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

– Góc giữa (SCD) và (ABCD) là $\widehat{SDA}$

– Góc giữa (SCB) với (ABCD) là $\widehat{SCA} = 45^0$

– Góc (SAD) và (SAB) với mặt phẳng (ABCD) bằng 90^0

c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

Vì CD ⊥ (SAD) nên mặt phẳng (SCD) ⊥ (SAD) theo giao tuyến SD, trong mặt phẳng (SAD) kẻ AD' ⊥ SD ta được AD' ⊥ (SCD), vậy d(A; (SCD)) = AD'

Trong ΔASD vuông tại A, AD' ⊥ SD nên $\dfrac{1}{AD'^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AD'^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AD'^2} = \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow AD'^2 = \frac{2a^2}{3} \Leftrightarrow AD' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

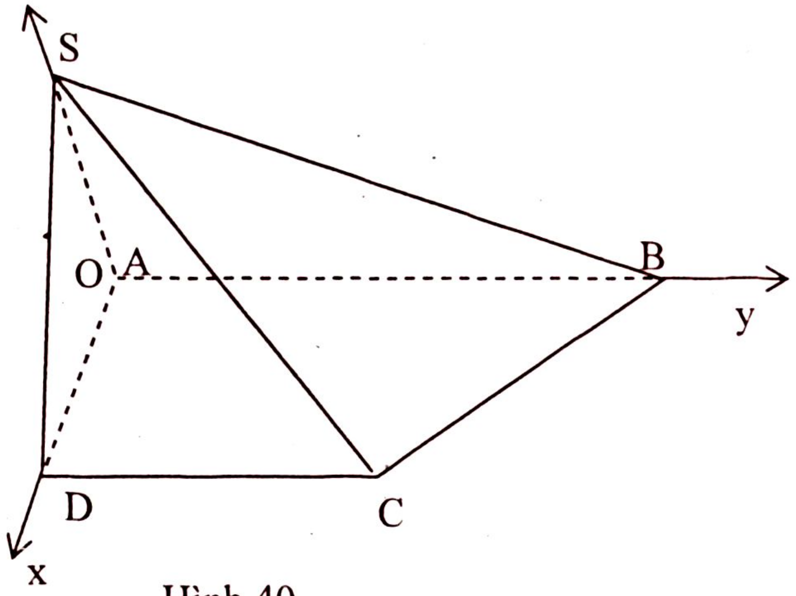
e) Xét tứ diện SADC: SDC = SDA = 90^0, điểm A và D nhìn 2 điểm S, C dưới 1 góc 90^0. Vậy 4 điểm S, A, D, C nằm trên mặt cầu đường kính SC = 2a, tâm I_1 là trung điểm SC.

Những câu còn lại nên giải bằng phương pháp tọa độ: Trong hệ trục Oxyz đặt hình chóp SABCD với A ≡ O, điểm D thuộc tia Ox, D(a; 0; 0)

Trên tia Oy đặt điểm B(0; 2a; 0)

Trên tia Oz đặt điểm S(0; 0; $a\sqrt{2}$)

Ta được C(a; a; 0) (với a > 0) (Hình 40)



Hình 40

* **Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD)**: Lập mặt phẳng (SBD) theo đoạn chắn. (SBD): $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{a\sqrt{2}} = 1$

$\Leftrightarrow 2x + y + \sqrt{2}z - 2a = 0$

Vậy $d(A; (SBD)) = \frac{|-2a|}{\sqrt{4+1+2}} = \frac{2a}{\sqrt{7}}$

* **Tính khoảng cách giữa AC và SB**

Tính $\overrightarrow{AC} = a(a; a; 0)$, $\overrightarrow{SB} = (0; 2a; -a\sqrt{2}), \overrightarrow{SA} = (0; 0; -a\sqrt{2})$,

Ta được: $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}\right] = (-a^2\sqrt{2}; a^2\sqrt{2}; 2a^2)$

$\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SA} = -2\sqrt{2}a^3$

$$d(AC; SB) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}\right]\right|} = a$$

* **Tìm tâm, bán kính của mặt cầu ngoại tiếp SCBD**

Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện SCBD ta được: $\begin{cases} IS^2 = IC^2 \\ IS^2 = IB^2 \\ IS^2 = ID^2 \end{cases}$ (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - a\sqrt{2})^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - a)^2 + z_0^2 \\ x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - a\sqrt{2})^2 = x_0^2 + (y_0 - 2a)^2 + z_0^2 \\ x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - a\sqrt{2})^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a\sqrt{2}z_0 + 2a^2 = -2x_0a - 2y_0a + 2a^2 \\ -2a\sqrt{2}z_0 + 2a^2 = -4y_0a + 4a^2 \\ -2a\sqrt{2}z_0 + 2a^2 = -2x_0a + a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - \sqrt{2}z_0 = 0 \\ \quad 2y_0 - \sqrt{2}z_0 = a \\ x_0 \quad - \sqrt{2}z_0 = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = a \\ z_0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ta được $I\left(0; a; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

*** Tìm tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SCDE (E là trung điểm của AB)**

Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SCDE. Ta có:

$$\begin{cases} IE^2 = IB^2 \\ IE^2 = IC^2 \\ IE^2 = IS^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + (y_0 - a)^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0 - 2a)^2 + z_0^2 \\ x_0^2 + (y_0 - a)^2 + z_0^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - a)^2 + z_0^2 \\ x_0^2 + (y_0 - a)^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - a\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_0 = 3a \\ 2x_0 = a \\ 2\sqrt{2}z_0 - 2y_0 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{a}{2} \\ y_0 = \dfrac{3}{2}a \\ z_0 = a\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta được tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SCDE: $I\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{3}{2}; a\sqrt{2}\right)$

bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

Bài 11: Cho hình chóp S.ABC với $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại A. Lấy M, N lần lượt thuộc cạnh SA, BC sao cho $AM = CN = t$, $t \in (0; 2a)$

a) Tính độ dài đoạn MN theo a, t. Tìm giá trị bé nhất của MN.

b) Chứng minh rằng khi MN bé nhất thì MN vuông góc với SA và BC.

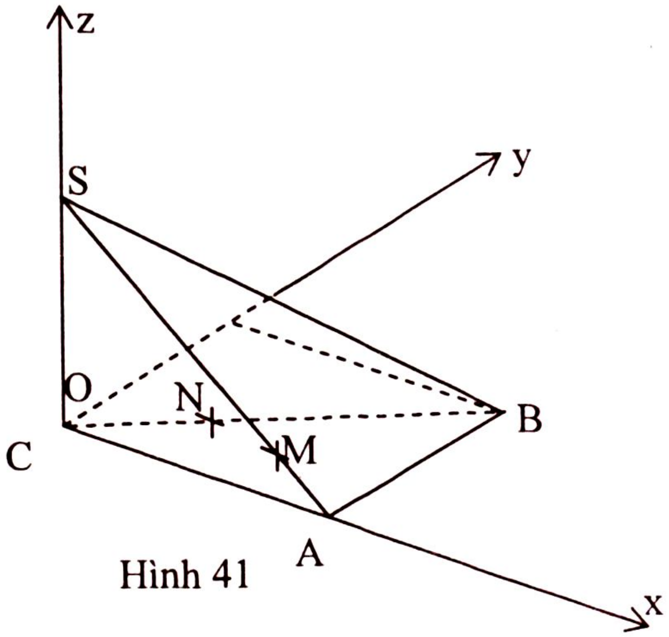
Bài giải (Hình 41)

Đặt hình chóp SABC vào hệ trục Oxyz với $C \equiv O(0; 0; 0)$, điểm A nằm trên tia Ox, $A(a\sqrt{2}; 0; 0)$, $B(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 0)$ nằm trên mặt phẳng (xOy), điểm $S(0; 0; a\sqrt{2})$ nằm trên tia Oz, $a > 0$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{t}{2a}\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{t}{2a}\overrightarrow{CB}$

Theo giả thiết AM = CN = t.

Tính được $M\left(a - \frac{t}{\sqrt{2}};0;\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$, $N\left(\frac{t}{\sqrt{2}};\frac{t}{\sqrt{2}};0\right)$



Hình 41

a) Tính MN: $MN^2 = 3t^2 - 2\sqrt{2}at + a^2 = 3\left(t - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} \geq \frac{a^2}{3}$

Với mọi t ∈ (0; 2a).

Dấu đẳng thức xảy ra ⇔ $t = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Tức là $MN \geq \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Vậy $MN = \sqrt{3t^2 - 2\sqrt{2}at + a^2}$ và Min $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ đạt được khi $t = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

b) Với $t = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ ta được $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{3};\frac{a}{3};-\frac{a}{3}\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(-a\sqrt{2};-a\sqrt{2};0\right)$; $\overrightarrow{SA} = \left(a\sqrt{2};0;-a\sqrt{2}\right)$

Ta được: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA} = 0$, $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = 0$

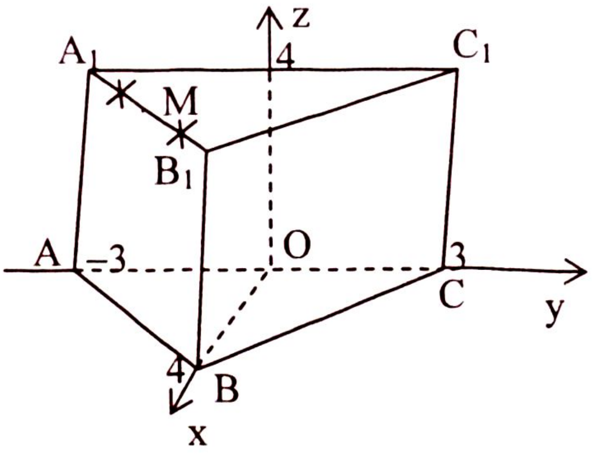
Chứng tỏ khi $t = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì MN ⊥ SA, MN ⊥ BC

Bài 12: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0; –3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), B(4; 0; 4)

a) Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1. Viết phương trình mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1)

b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, M và song song với BC_1. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN **(Đề thi Đại học năm 2005 – Khối B)**

Bài giải (Hình 42)



Hình 42

a) Do tam giác ABC nằm trong mặt phẳng (xOy) nên tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trong mặt phẳng z = 4 nên $A_1(0; -3; 4)$, $C_1(0; 3; 4)$

– Tính $\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4)$

– Mặt phẳng (BCC_1B_1) nhận $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BB_1}$ làm cặp VTCP nên nhận

$\vec{n} = \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}\right] = (3; 4; 0)$ làm 1 VTPT.

Có phương trình: $3x + 4y - 12 = 0$

– Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCB_1C_1) là:$d = \frac{24}{5} = R$ là bán kính

của mặt cầu tâm A bán kính $R = \frac{24}{5}$ tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1).

Mặt cầu có phương trình là: $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}$

b) Trung điểm M của A_1B_1, $M\left(2; -\frac{3}{2}; 4\right)$, $\overrightarrow{AM} = \left(2; \frac{3}{2}; 4\right)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-4; 3; 4)$

– Mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, M và song song với BC_1 nên (P) nhận 2 véc tơ: $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC_1}$ nên nhận $\overrightarrow{n_1} = -\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}\right] = (1; 4; -2)$ làm 1 VTPT

Phương trình (P): $x + 4y - 2z + 12 = 0$

Điểm B(4; 0; 0) $\notin$ (P) nên (P) đi qua A, M và P // BC_1

– Phương trình tham số AC_1: $\begin{cases} x = 0 & (1) \\ y = -3 + 6t & (2), \\ z = 4 & (3) \end{cases}$

(P): $x + 4y - 2z + 12 = 0$ (4)

– (P) $\cap$ AC_1 = N. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình: (1), (2), (3), (4).

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta được $t = \frac{1}{3}$ nên được tọa độ điểm N(0; –1; 4)

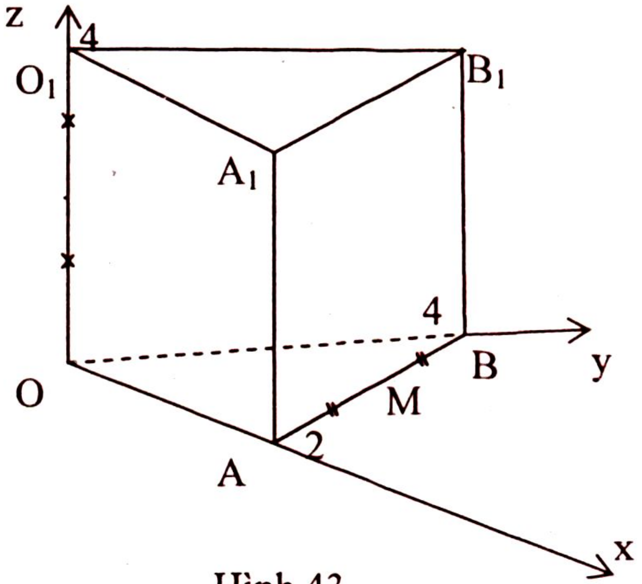
Do đó độ dài đoạn $MN = \sqrt{(2-0)^2 + \left(-\frac{3}{2}+1\right)^2 + (4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

Bài 13: Trong hệ trục Oxyz cho lăng trụ đứng $OAB.O_1A_1B_1$ với A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), O_1(0; 0; 4)

a) Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1. Viết phương trình mặt cầu qua 4 điểm O, B, A, O_1.

b) Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng (P) qua M, và (P) vuông góc với O_1A, (P) cắt OA, AA_1 lần lượt tại N, K. Tính độ dài NK.

Bài giải (Hình 43)



Hình 43

a) Tọa độ O(0; 0; 0), A_1(2; 0; 4), B_1(0; 4; 4)

– Tứ diện $O_1.OAB$ có $O_1O \perp OB \perp OA$, nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện O_1OAB cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật, đáy OADB. Với D là điểm đối xứng của O qua trung điểm của AB, D(2; 4; 0) tâm I của mặt cầu là trung điểm của O_1D: I(1; 2; 2), bán kính R = IO = 3.

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp O_1OAB có dạng:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$$

b) M trung điểm AB: M(1; 2; 0), $\overrightarrow{O_1A} = (2; 0; -4)$

Mặt phẳng (P) qua M, (P) $\perp$ OA nhận $\overrightarrow{O_1A}$ làm VTPT

(P) có phương trình $2(x-1)-4z=0 \Leftrightarrow x-2z-1=0$

(P) $\cap$ OA cũng chính là giao điểm của (P) với Ox tại điểm N(1; 0; 0)

(P) $\cap$ AA_1 = K

Phương trình AA_1 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ tìm được $K\left(2;0;\frac{1}{2}\right)$

Vậy NK = $\sqrt{1^2+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (đơn vị độ dài)

Bài 14: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông AB = BC = a. Cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM và B'C

(Đề thi Đại học năm 2007 – Ban D)

Bài giải

Bài này có thể dùng kiến thức hình học thuần túy để xác định và tính khoảng cách giữa AM và B'C. ở đây trình bày bằng phương pháp tọa độ

Đặt hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' vào hệ trục Oxyz với A $\equiv$ O(0; 0; 0), B $\in$ tia Ox, B(a; 0; 0), C $\in$ mặt phẳng (xOy), C(a; a; 0), A'(0; 0; $a\sqrt{2}$), B'(a; 0; $a\sqrt{2}$) với a > 0

Ta được: $M\left(a;\frac{a}{2};0\right)$ là trung điểm của BC

$\overrightarrow{AM}=\left(a;\frac{a}{2};0\right)$, $\overrightarrow{B'C}=(0;a;-a\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AB'}=(a;0;a\sqrt{2})$

Tính $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\sqrt{2};a^2\right)$; $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'}=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

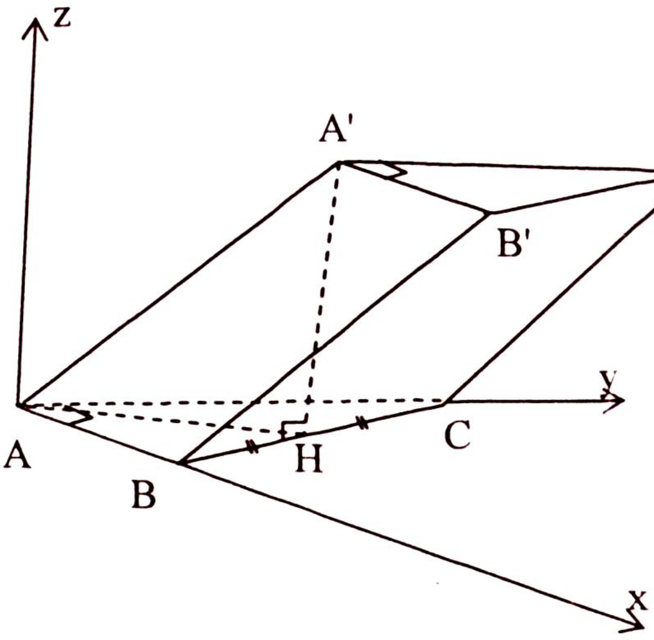
Khoảng cách giữa AM và B'C bằng h

$$h=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Bài 15: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A: AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối chóp A'.ABC và tính côsin của góc giữa 2 đường thẳng AA' và B'C'

(Đề thi Đại học năm 2008 – Ban A)

Bài giải (Hình 44)



Hình 44

Vì hình lăng trụ có hình chiếu A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC nên lăng trụ đã cho là lăng trụ xiên

ΔABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ nên $BC = 2a$

$\Delta A'AH$ vuông tại H. $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Thể tích của khối chóp A'.ABC = V

$$V = \frac{1}{3}A'H.dt\,\Delta ABC = \frac{a^3}{2} \text{ (đvtt)}$$

Để làm tiếp bài 15 (kể cả việc tính V). Đặt hình lăng trụ ABC.A'B'C' vào hệ trục Oxyz với $A \equiv O(0;\,0;\,0)$, $B \in$ tia Ox, $B(a;\,0;\,0)$, C nằm trên tia Oy, $C(a\sqrt{3};\,0)$. H trung điểm BC, $H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ nên $A'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$ với $a > 0$

Ta có $\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BC} = (-a;a\sqrt{3};0)$. Vì $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}$

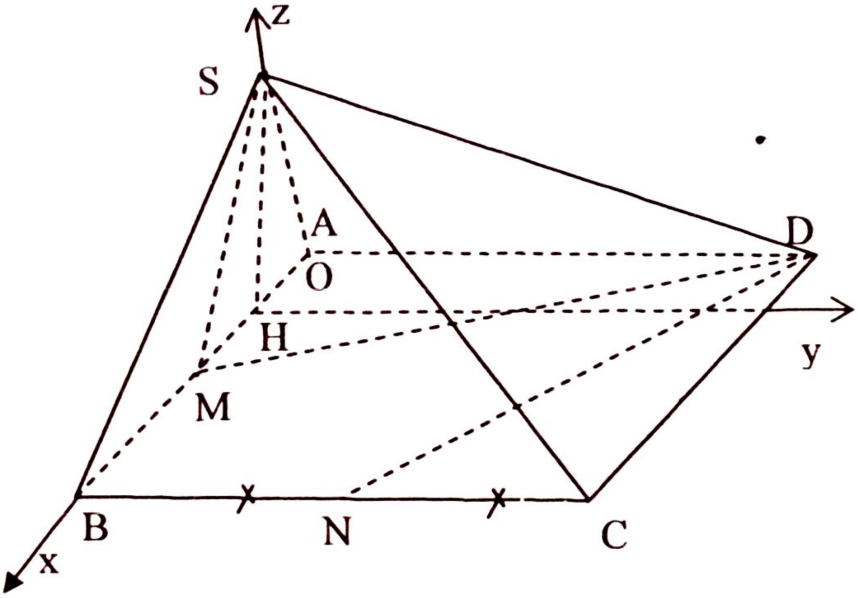
Nên góc giữa AA' và B'C' cũng chính là góc giữa AA' và BC. Gọi α là góc nhọn giữa AA' và B'C'

$$\cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BC})| = \frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}\right|}{AA'.BC} = \frac{1}{4}$$

(Tính $V_{A'ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'B}\right].\overrightarrow{AC}\right|$)

Bài 16: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC. Tính côsin của góc giữa 2 đường thẳng SM và DN **(Đề thi Đại học B – 2009)**

Bài giải (Hình 45)



Hình 45

Do tam giác ABS có $SA^2 + SB^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 = AB^2$. Vậy ΔSAB vuôn tại S. SM là trung tuyến nên SM = a = AM = AS: ΔSAM đều cạnh a, nên là trung điểm AM thì SH ⊥ AM, $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà (SAB) ⊥ (ABCD) theo gi thiết AB nên SH ⊥ (ABCD)

Đặt hình chóp SABCD vào hệ trục Oxyz với H ≡ O(0; 0; 0)

$$M\left(\frac{a}{2};0;0\right),\ S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right),\ \overline{SM} = \left(\frac{a}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$D\left(-\frac{a}{2};2a;0\right), N\left(\frac{3a}{2};a;0\right),\ \overline{DN} = (2a;-a;0)$$

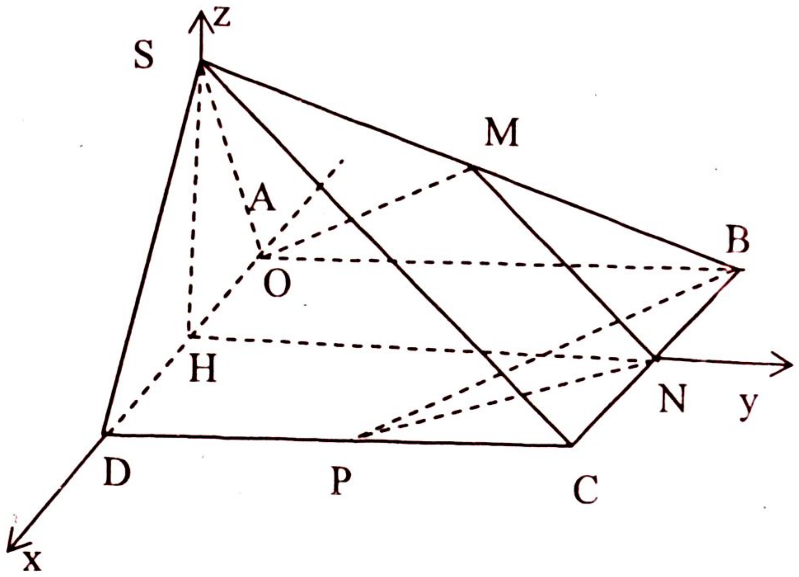
Gọi α là côsin của góc giữa SM và DN. α nhọn

$$\cos\alpha = |\cos\left(\overline{SM},\overline{DN}\right)| = \frac{\left|\overline{SM}.\overline{DN}\right|}{SM.DN} = \frac{a^2}{\sqrt{5a^2}.\sqrt{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Bài 17: Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a mặt bê SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh rằn AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

(Đề thi Đại học năm 2006 – Ban

Bài giải (Hình 46)



Hình 46

Vì ΔABC đều cạnh a và mặt phẳng (SAD) ⊥ mặt phẳng (ABCD) nên SH là đường cao của Δ đều SAD, SH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì SH ⊥ (ABCD). Dưới đây trình bày lời giải bằng phương pháp tọa độ. Đặt hình chóp SABCD vào hệ trục Oxyz với H ≡ O, D nằm trên Ox, $D\left(\frac{a}{2};0;0\right)$. Điểm A nằm trên tia đối của Ox, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, S ∈ tia Oz: $S(0;0;a\sqrt{2}), B\left(-\frac{a}{2};a;0\right), C(\frac{a}{2};a;0)$ với a > 0

Ta được $M\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; N(0; a; 0); $P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right);\overrightarrow{BP}=\left(a;-\frac{a}{2};0\right)$

Vì $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP}=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+0=0$ nên AM ⊥ BP

Thể tích khối tứ diện NCMP = V = $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{CP}.\left[\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NM}\right]\right|$.

Ta có:

$\overrightarrow{CP}=\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$; $\overrightarrow{NC}=\left(\frac{a}{2};0;0\right);\overrightarrow{NM}=\left(-\frac{a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

$\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{NM}=\left(0;-\frac{a^2\sqrt{3}}{8};-\frac{a^2}{4}\right)$

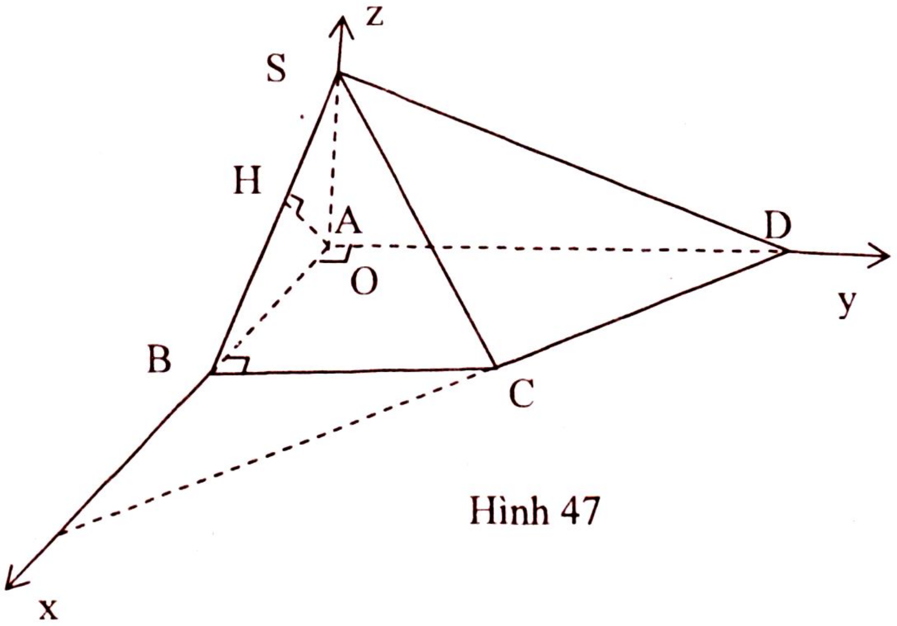
Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt)

Bài 18: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang: $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$ $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $SA = a\sqrt{2}$ gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh rằng: tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD)

(Đề thi Đại học năm 2007 – Ban D)

Bài giải (Hình 47)

Vì hình chóp có đáy là hình thang vuông tại A và B, SA ⊥ mặt đáy nên đặt hình chóp vào hệ trục Oxyz với $A \equiv O(0; 0; 0)$, điểm B nằm trên tia Ox với $B(a; 0; 0)$, điểm D nằm trên tia Oy với $D(0; 2a; 0)$, đỉnh S nằm trên tia Oz với $S(0; 0; a\sqrt{2})$ $(a > 0)$, điểm $C(a; a; 0)$.



Hình 47

Do $SA^2 = SH \cdot SB \Leftrightarrow SH = \frac{2}{3}SB$. Giải phương trình $\overrightarrow{SH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SB}$

Tìm được điểm H là hình chiếu của A trên SB và $H\left(\frac{2}{3}a; 0; \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$, kéo dài DC cắt tia Ox tại $E(2a; 0; 0)$

– Lập phương trình mặt phẳng (SCD) (lập theo đoạn chắn):

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{a\sqrt{2}} = 1$$

– Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng h

$$h = \frac{\left|\frac{1}{2a}x_H + \frac{1}{2a}y_H + \frac{1}{a\sqrt{2}}z_H - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2}}} = \frac{a}{3}$$

Đáp số: $h = \frac{a}{3}$

Còn việc chứng minh ΔSCD vuông: có thể chứng minh: $\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD} = 0$ hoặc dùng định lý 3 đường vuông góc.

Bài 19: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D. Với A'(0; 0; 0), B'(a; 0; 0), D'(0; b; 0), A(0; 0; c) với a, b, c > 0. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, B'C, C'D', DD'.

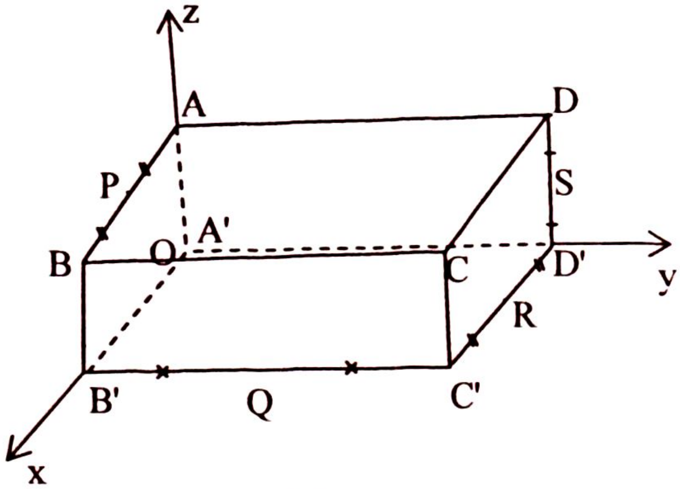
a) Viết phương trình tham số của các đường thẳng PR và QS.

b) Xác định a, b, c để PR vuông góc với QS.

c) Chứng tỏ rằng PR cắt QS.

d) Tính diện tích của tứ giác PQRS.

Bài giải (Hình 48)



Hình 48

Tọa độ điểm C'(a; b; 0), C(a; b; c), B(a; 0; c),

$$P\left(\frac{a}{2};0;c\right),\ Q\left(a;\frac{b}{2};0\right),\ R\left(\frac{a}{2};b;0\right),\ S\left(0;b;\frac{c}{2}\right)$$

a) Ta có $\overrightarrow{PR} = (0; -b; -c)$, $\overrightarrow{QS} = \left(-a;\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$

Phương trình tham số PR: $\begin{cases} a = \frac{a}{2} \\ y = -bt \quad (t \in R) \\ z = c - ct \end{cases}$

QS: $\begin{cases} x = a - at' \\ y = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}t' \ (t' \in R) \\ z = \frac{c}{2}t' \end{cases}$

b) $PR \perp QS \Leftrightarrow \overrightarrow{PR}.\overrightarrow{QS} = 0 \Leftrightarrow b = c > 0$

c) Giải hệ phương trình được tạo thành từ 2 phương trình của PR và QS ta được $t = \frac{3}{4}$ và $t' = \frac{1}{2}$. Điều đó chứng tỏ PR cắt QS tại 1 điểm duy nhất.

d) Vì PR cắt QS nên 4 điểm P, Q, R, S đồng phẳng. Tính diện tích của tứ diện PQRS

Cách 1: Áp dụng công thức dt PQRS = $\frac{1}{2}$PR x QS sinα (α là góc giữa PR và QS)

$+$ Tính $PR = \sqrt{b^2 + c^2}$, $QS = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$

$$+ \cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{QS}| = \frac{\left|\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right|}{\sqrt{b^2+c^2}.\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}}$$

$$+ \text{ Tính } \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}.\sqrt{4a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vậy dt PQRS = $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$ (đvdt)

Cách 2: dt PQRS = $\frac{1}{2}$.PR.QS.sinα

Chú ý: dt PQRS = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PR}\right|.\left|\overrightarrow{QS}\right|.\sin\alpha = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{PR},\overrightarrow{QS}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$ (đvdt)

Bài 20: Cho hình hộp chữ nhật có các đỉnh A(3; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 5), O(0; 0; 0). Đỉnh D đối xứng với O qua tâm I của hình hộp chữ nhật.

a) Xác định tọa độ của D. Viết phương trình mặt phẳng (ABD)

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua D và Δ vuông góc với mặt phẳng (ABD)

Hướng dẫn giải

(Hình 49)

Tọa độ điểm E(3; 4; 0)

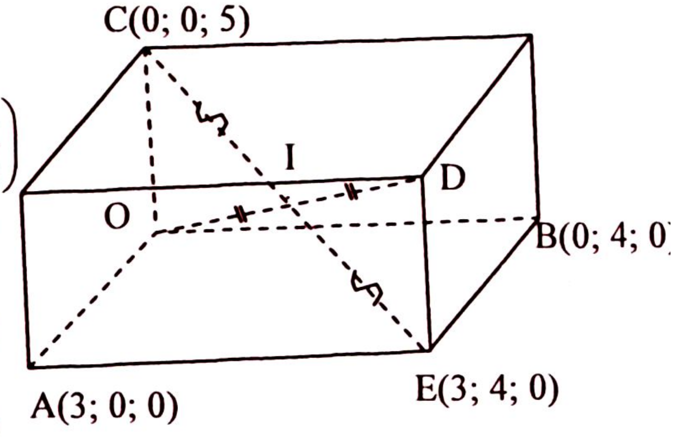
I là tâm hình hộp chữ nhật

I là trung điểm của CE, $I\left(\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}\right)$

Tọa độ điểm D đối xứng với O qua I là: D(3; 4; 5)

– Lập phương trình mặt phẳng (ABD) nên:

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right] = (-20; -15; 12)$



Hình 49

Phương trình mặt phẳng (ABD): $20x + 15y - 12z - 60 = 0$

b) Phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x = 3 + 20t \\ y = 4 + 15t \quad (t \in R) \\ z = 5 - 12t \end{cases}$

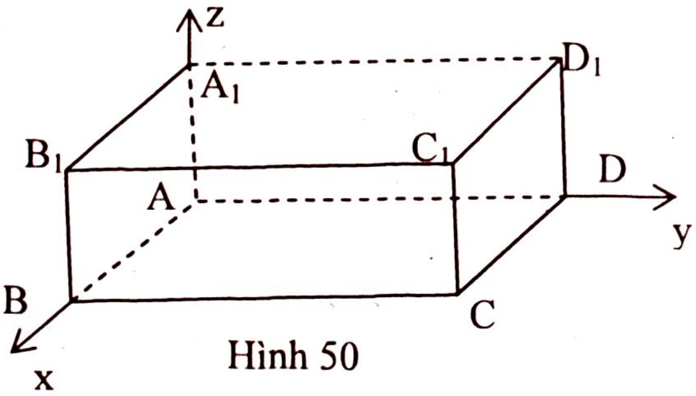
Bài 21: Trong hệ trục Oxyz cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với điểm $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A_1(0; 0; \sqrt{2})$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B, C và phương trình hình chiếu vuông góc của B_1, D_1 lên mặt phẳng (P)

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và (Q) vuông góc với A_1C. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $A_1.ABCD$ với mặt phẳng (Q)

Hướng dẫn giải (Hình 50)

a) Vì A, B, C ∈ mặt phẳng (xOy) nên mặt phẳng (P) đi qua A, B, C chính là mặt phẳng (xOy), (P): $z = 0$



Hình 50

Hình chiếu của B_1, D_1 lên mặt phẳng (P) là điểm B và điểm D, phương trình hình chiếu vuông góc của B_1, D_1 lên mặt phẳng (P) là đường thẳng BD có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

b) Phương trình mặt phẳng (Q): $x + y - \sqrt{2}z = 0$

– Lập phương trình các đường thẳng A_1B, A_1C, A_1D và tìm giao điểm của nó với mặt phẳng (Q) ta được:

$$B'\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{\sqrt{2}}{3}\right), C'\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), D'\left(0; \frac{2}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

– Tính diện tích của tứ giác AC'D'B' = S

$$S = dt\,\Delta AB'C' + dt\,\Delta AC'B' = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (đvdt)}$$

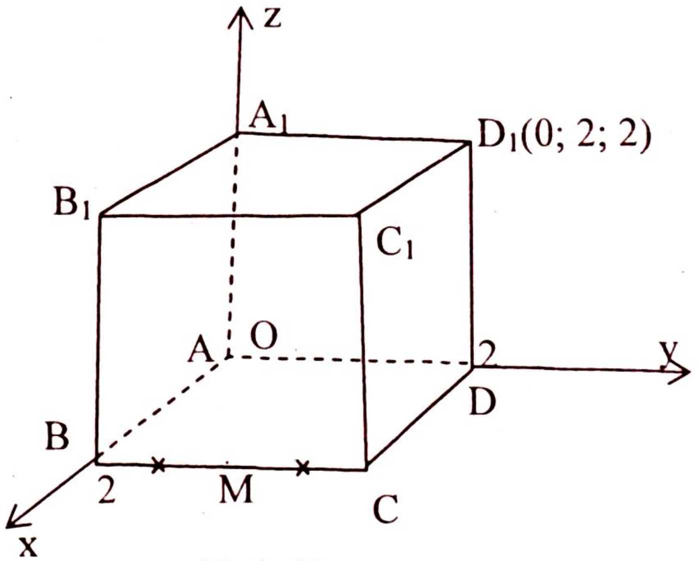
Bài 22: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $D_1(0; 2; 2)$

a) Xác định tọa độ của các đỉnh còn lại của hình lập phương

Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng 2 mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) vuông góc với nhau.

b) Chứng minh rằng tỷ số khoảng cách từ điểm N thuộc cạnh AC_1 $(N \neq A)$ tới 2 mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) không phụ thuộc vào vị trí của điểm N trên AC_1

Bài giải (Hình 51)



Hình 51

a) $D(0; 2; 0)$, $C(2; 2; 0)$, $A_1(0; 0; 2)$, $B_1(2; 0; 2)$, $C_1(2; 2; 2)$, $M(2; 1; 0)$

– Mặt phẳng (AB_1D_1) nhận 2 véc tơ $\overrightarrow{AB_1}$ và $\overrightarrow{AD_1}$ làm cặp VTCP

$\overrightarrow{AB_1} = (2; 0; 2)$; $\overrightarrow{AD_1} = (0; 2; 2)$

$[\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD_1}] = (-4; -4; 4)$

Mặt phẳng (AB_1D_1) nhận véc tơ $\vec{n_1} = -\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD_1}\right] = (1; 1; -1)$ làm VTPT

Tương tự mặt phẳng (AMB_1) nhận 2 véc tơ: $\overrightarrow{AM} = (2; 1; 0)$ và $\overrightarrow{AB_1}$ làm cặp VTCP nên nhận $\overrightarrow{n_2} = (1; -2; -1)$ làm VTPT

Ta có $\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2} = 1 - 2 + 1 = 0$ vậy $(AB_1D_1) \perp (AMB_1)$

b) Phương trình tham số của AC_1: $\begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in R) \\ z = t \end{cases}$

Lấy điểm $N \in AC_1$, $N(t; t; t)$ $(t \neq 0)$

Gọi $d_1 = d(N; (A_1B_1D_1))$ phương trình mặt phẳng (AB_1D_1): $x + y - z = 0$

Gọi $d_2 = d(N; (AMB_1))$ phương trình mặt phẳng (AMB_1): $x - 2y - z = 0$

Ta có: $d_1 = \frac{|t|}{\sqrt{3}}$; $d_2 = \frac{2|t|}{\sqrt{6}}$ với $t \neq 0$

Ta có: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{|t|}{\sqrt{3}} x \frac{\sqrt{6}}{2|t|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ không phụ thuộc

Tức $\frac{d_1}{d_2}$ không phụ thuộc vị trí điểm N

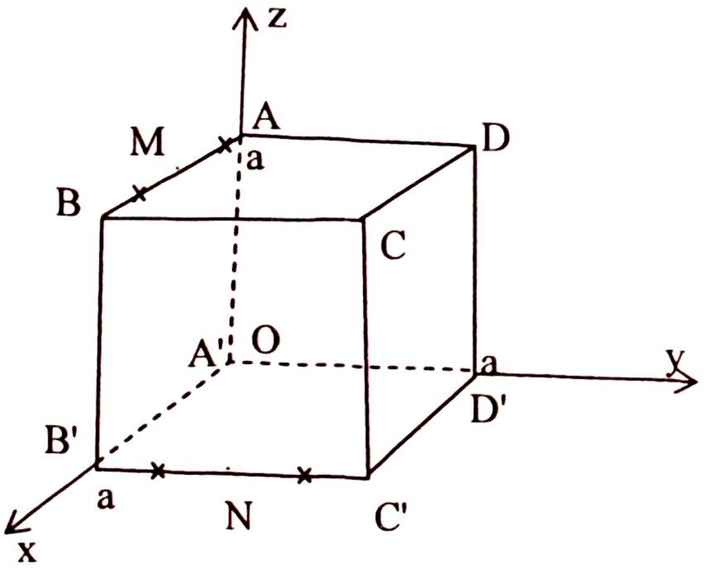
Bài 23: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A'(0; 0; 0), B'(a; 0; 0), D'(0; a; 0), A(0; 0; a) với a > 0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và B'C'

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) qua M và (α) song song với 2 đường thẳng AN và BD'.

2) Tính thể tích khối tứ diện ANBD'.

3) Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AN và BD'.

Bài giải (Hình 52)



Hình 52

Ta có: C'(a; a; 0), B(a; 0; a), D(0; a; a), C(a; a; a), $M\left(\frac{a}{2};0;a\right)$, $N\left(a;\frac{a}{2};0\right)$

1) $\overrightarrow{AN} = \left(a;\frac{a}{2};-a\right)$ chọn VTCP của AN và $\vec{u} = (2; 1; -2)$

$\overrightarrow{BD'} = (a; -a; a)$, chọn 1 VTCP của BD' là $\vec{v} = (1; -1; 1)$

Chú ý: Khi tính diện tích, thể tích liên quan đến $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{BD'}$ phải giữ nguyên tọa độ của các véc tơ đó còn tính góc và lập phương trình mặt phẳng mà lấy VTCP thì lấy 2 véc tơ $\vec{u'}$ và $\vec{v}$.

Tính $[\vec{v}\,.\,\vec{u'}] = (1;\,4;\,3)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và (α) song song với AN, BD' nên (α) nhận $\vec{u'}$ và $\vec{v}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n} = [\vec{v}\,.\,\vec{u'}]$ $= (1;\,4;\,3)$ làm 1 VTPT: (α) có phương trình: $x + 4y + 3z - \frac{7}{2}a = 0$

2) Tính thể tích khối tứ diện ANBD' = V

$$V = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AB'}\right]\right|\overrightarrow{AD} \text{ ta có:}$$

* $\overrightarrow{AB'} = (a;\,0;\,0)$

* $\overrightarrow{AD'} = (0;\,a;\,-a)$

* $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}\right] = \left(0; a^2; \frac{a^2}{2}\right)$

* $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}\right]\overrightarrow{AD'} = \frac{a^3}{2}$

Vậy $V = \frac{a^3}{12}$ (đvtt)

3) β là góc nhọn giữa AN và BD' nên α là góc nhọn giữa 2 véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$

$$\cos\beta = |\cos(\vec{u}\,,\vec{v}\,)| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3}.3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$d(AN,\,BD') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BD'},\overrightarrow{AN}\right]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{BD'}.\overrightarrow{AN}\right|}$$

Ta có:

* $\left[\overrightarrow{BD'},\overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{a^2}{2}; 2a^2; \frac{3a^2}{2}\right)$

* $\left[\overrightarrow{BD'}.\overrightarrow{AN}\right]\overrightarrow{AB} = \frac{a^3}{2}$; $\left|\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BD'}\right| = \frac{a^2}{2}\sqrt{26}$

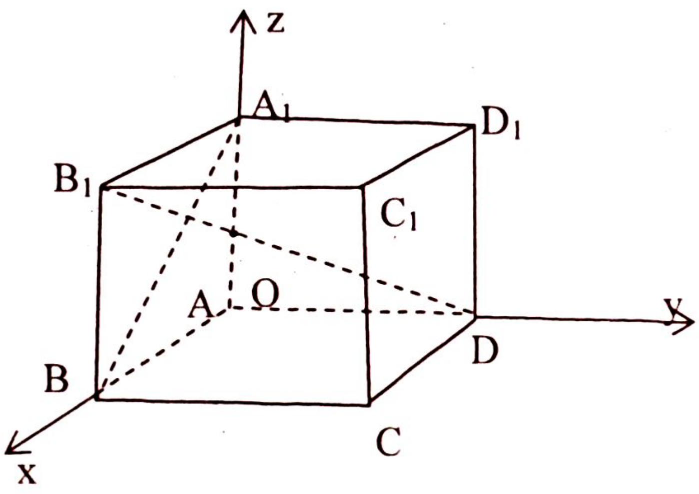
Vậy $d(AN,\,BD') = \frac{a\sqrt{26}}{26}$ (đơn vị độ dài)

Bài 24: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a

a) Tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng A_1B và B_1D

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa 2 đường thẳng MP và C_1N **(Đề thi Đại học năm 2002 – B)**

Bài giải (Hình 53)



Hình 53

Đặt hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ vào hệ trục Oxyz với điểm $A \equiv O(0;\ 0;\ 0)$ đỉnh $B \in$ tia Ox. $B(a;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ a;\ 0)$ đỉnh C nằm trong mặt phẳng (xOy): $C(a;\ a;\ 0)$

$A_1 \in$ tia Oz, $A_1(0;\ 0;\ a)$, $B_1(a;\ 0;\ a)$, $D_1(0;\ a;\ a)$, $C_1(a;\ a;\ a)$

M trung điểm của B_1B, $M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$

N là trung điểm của CD, $N\left(\frac{a}{2};a;0\right)$

P là trung điểm của A_1D_1: $P\left(0;\frac{a}{2};a\right)$

a) Ta được $\overrightarrow{A_1B} = (a;\ 0;\ -a)$, $\overrightarrow{B_1D} = (-a;\ a;\ -a)$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (a;\ 0;\ 0)$

$\left[\overrightarrow{A_1B_1}.\overrightarrow{B_1D}\right] = (a^2;\ 2a^2;\ a^2)$

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng A_1B và B_1D:

$$d(A_1B;\ B_1D) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{B_1D}\right]\overrightarrow{A_1B_1}\right|}{A_1B.B_1D} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \text{ (đơn vị độ dài)}$$

b) Ta có $\overrightarrow{MP}' = \left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{NC_1} = \left(\frac{a}{2};0;a\right)$

Vì $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC_1} = 0$ chứng tỏ $MP \perp NC_1$

Nên góc giữa MP và NC_1 bằng 90^0

Bài 25: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có AB = a. Gọi M là điểm bất kỳ nằm trên AB

a) Đặt $AM = m \in (0;\ a)$. Tính giá trị của m theo a để góc giữa 2 đường thẳng DM và AC bằng 60^0

b) Khi M là trung điểm của AB. Hãy tính diện tích của thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' khi cắt bởi mặt phẳng (B'DM) theo a.

Hướng dẫn giải

Đặt hình lập phương ABCD.A'B'C'D' vào hệ trục Oxyz với A'(0; 0; 0), B'(a; 0; 0), D'(0; a; 0), A(0; 0; a), B(a; 0; a), C'(a; a; 0), D(0; a; a), C(a; a; a), M(m; 0; a) với a > 0, 0 < m < a

a) Tính $\overrightarrow{DM} = (m; -a; 0)$, $\overrightarrow{AC'} = (a; a; -a)$

Ta có $\cos 60^0 = \left|\cos(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AC'})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{AC'}\right|}{DM.AC'} = \dfrac{\left|am - a^2\right|}{\sqrt{m^2 + a^2}.a\sqrt{3}}$

Giải hệ phương trình: $\dfrac{|m - a|}{\sqrt{3}.\sqrt{m^2 + a^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = a(4 - \sqrt{15})$

b) M là trung điểm của AB: $M\left(\dfrac{a}{2}; 0; a\right)$

– Lập phương trình mặt phẳng (B'DM), lập phương trình tham số C'D'

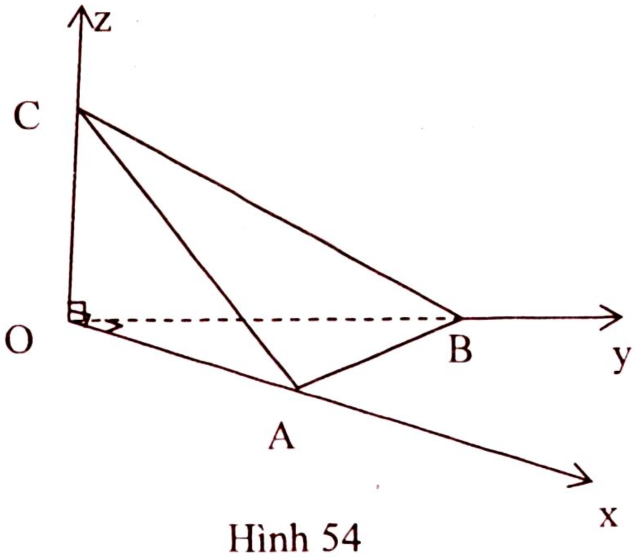
– Tìm N là giao điểm của C'D' với mặt phẳng (B'DM)

Ta được $N\left(\dfrac{1}{2}a; a; 0\right)$ là trung điểm của C'D'

– Chứng minh thiết diện giữa mặt phẳng (B'DM) với hình lập phương là tứ giác B'MDN là hình thoi

– dt(B'MDN) = $\left|\left[\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'N}\right]\right| = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$ (đvdt)

Bài 27: Trong hệ trục Oxyz, cho điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), a, b, c > 0. Làm các câu hỏi sau:



Hình 54

1. Chứng minh tam giác ABC nhọn

Giả sử $\widehat{A}$ là góc lớn nhất trong 3 góc A, B, C của tam giác ABC

Ta có $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{AC.AB} > 0$

Vậy góc $\widehat{A}$ nhọn nên ΔABC có 3 góc đều nhau

Hoặc dùng định lý côsin để chứng minh góc A nhọn.

2. Lập phương trình mặt phẳng (ABC)

Lập phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

3. Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) khi và chỉ khi H là trực tâm của ΔABC

Cách 1: Từ O hạ OH ⊥ ABC. Chứng minh H là trực tâm của ΔABC: tức là phải chứng minh AH ⊥ CB và BH ⊥ AC và ngược lại.

Cách 2:

– Viết phương trình đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

$$OH: \begin{cases} x=\frac{1}{a}t \\ y=\frac{1}{b}t \quad (t\in R) \\ z=\frac{1}{c}t \end{cases}$$

– Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC)

$$H\left(\frac{ab^2c^2}{m};\frac{a^2bc^2}{m};\frac{a^2b^2c}{m}\right) \text{ với } m=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$$

– Lập $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH},\overrightarrow{AC}$. Chứng minh $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

Để kết luận H là trực tâm của ΔABC

4. Tính độ dài đoạn OH (H là hình chiếu của O trên (ABC))

Cách 1: Tính $OH=\sqrt{x_H^2+y_H^2+z_H^2}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$

Cách 2: Chứng minh: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$

Với OA = a, OB = b, OC = c

5. Tính diện tích tam giác ABC

Cách 1: $\text{dt }\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$

Cách 2: $V_{C.OAB}=\frac{1}{3}CO.\text{dt }\Delta ABC=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}\ OH.\text{dt }\Delta ABC$

$\Leftrightarrow \text{dt }\Delta ABC=\frac{abc}{2OH}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$

6. Gọi diện tích tam giác ABC = S

dt $\Delta OBC = S_1$.dt $\Delta OAB = S_2$, dt $\Delta OAC = S_3$.

Chứng minh: $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

Chứng minh

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}c^2a^2$$

$$S_1 = \frac{1}{4}c^2b^2,\ S_2 = \frac{1}{4}a^2b^2,\ S_3 = \frac{1}{4}a^2c^2$$

7. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa OH với OA, OB, OC. Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

ΔOHA vuông tại H: $\cos^2\alpha = \dfrac{OH^2}{OA^2} = \dfrac{OH^2}{a^2}$

Tương tự $\cos^2\beta = \dfrac{OH^2}{b^2}$; $\cos^2\gamma = \dfrac{OH^2}{c^2}$

Ta được $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = OH^2\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$

Chứng minh: $\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) = \dfrac{1}{OH^2} \Leftrightarrow OH^2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}$

Vậy: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

8. Cho a, b, c thay đổi thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ ($k > 0$). Tìm điều kiện của a, b, c để dt ΔABC lớn nhất. Chứng tỏ rằng khi dt ΔABC lớn nhất thì OH cũng lớn nhất.

Bài giải

– Chứng minh BĐT: $3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \le (a^2 + b^2 + c^2)^2$ (1)

+ Chứng minh (1): ta có $(a^2 - b^2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 \ge 2a^2b^2$

Tương tự: $a^4 + c^4 \ge 2a^2c^2$, $b^4 + c^4 \ge 2b^2c^2$

Từ đó ta được: $2(a^4 + b^4 + c^4) \ge 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \ge 3(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$

$\Leftrightarrow 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \le (a^2 + b^2 + c^2)^2$ (1) đúng

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$

(1) $\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le \dfrac{k^4}{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \le \dfrac{k^2}{3} \Leftrightarrow S = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \le \dfrac{k^2}{2\sqrt{3}}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = k^2 \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

Vậy MaxS = $\frac{k^2}{2\sqrt{3}}$ đạt được khi $a = b = c = \frac{k}{\sqrt{3}}$

* Ta có $\frac{1}{OH} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ nhân 2 vế với k^2

$$\Leftrightarrow \frac{k}{OH^2} = (a^2 + b^2 + c^2)\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Theo BĐT côsi: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

Vậy $\frac{k}{OH^2} \geq 9$ dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = k^2 \\ a = b = c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{k}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{OH^2}{k} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow OH^2 \leq \frac{k^2}{9} \Leftrightarrow OH \leq \frac{k}{3}$$

Vậy MaxOH = $\frac{k}{3}$ đạt được khi $a = b = c = \frac{k}{\sqrt{3}}$

Do đó: diện tích ΔABC lớn nhất thì OH cũng lớn nhất

Bài 28: Trong không gian Oxyz cho 4 điểm A(1; 0; 2), B(1; 1; 0), C(0; 0; 1), D(1; 1; 1). Làm các câu hỏi sau:

1. Chứng minh rằng ABCD là 4 đỉnh của khối tứ diện

Tính $\overrightarrow{CA} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{CB} = (1; 1; -1)$; $\overrightarrow{CD} = (1; 1; 0)$

$\left[\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right] = (-1; 2; 1)$, $\left[\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right]\overrightarrow{CD} = 1 \neq 0$

Vậy 3 véc tơ $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ không đồng phẳng nên A, B, C, D là 4 đỉnh của khối tứ diện.

2. Tính thể tích của khối tứ diện ABCD

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right]\overrightarrow{CD}\right| = \frac{1}{6}$ đơn vị thể tích

3. Viết phương trình đường cao của tứ diện ABCD hạ từ đỉnh D

Đường cao hạ từ D xuống mặt phẳng (ABC) nhận VTPT của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (-1; 2; 1)$ làm 1 VTCP

Phương trình đường cao hạ từ D của tứ diện ABCD dưới dạng chính tắc:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

4. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp ABCD

Cách 1: Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp ABCD, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}, y_0 = -\frac{1}{2}, z_0 = \frac{1}{2}$$

Bán kính $R = IA = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Phương trình mặt cầu có dạng: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$

Cách 2: Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp ABCD có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

Cho (S) lần lượt đi qua 4 điểm A, B, C, D giải hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$ ta được phương trình mặt cầu (S) giống cách 1

5. Viết phương trình mặt phẳng, tiếp xúc với mặt cầu (S) tại đỉnh A

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại đỉnh A có véc tơ pháp tuyến là:

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(1; -1; -3)$

Phương trình mặt phẳng phải lập: $x - y - 3z + 5 = 0$

6. Xác định tọa độ đỉnh A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD)

– Viết phương trình mặt phẳng (BCD): $x - y = 0$

– Đường thẳng qua A vuông góc với (BCD): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \quad (t \in R) \\ z = 2 \end{cases}$

– Gọi K là giao điểm của đường thẳng này với mặt phẳng (BCD) tìm được $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$

– Điểm A' đối xứng với A qua (BCD) đoạn AA' nhận K làm trung điểm, ta được $A'(0; 1; 2)$

7. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AC và BD

Dễ nhận thấy BD // (xOz) mà (xOz) chứa AC nên

$d(AC; BD) = d(B; (xOz)) = 1$

Bài 29: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng d: $\frac{x+1}{2} = y + 1 = z - 3$. Làm các câu sau:

1. Tìm tọa độ giao điểm A của d và (P)

Tọa độ giao điểm A của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t & (1) \\ y = -1 + t & (2) \\ z = 3 + t & (3) \\ x + 2y - z + 5 = 0 & (4) \end{cases}$$ giải hệ 1, 2, 3, 4 được $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$

2. Tính góc α giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Gọi VTCP của d là $\vec{n} = (2; 1; 1)$, (P) có VTPT là $\vec{n} = (1; 2; -1)$

nên $\sin\alpha = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\vec{u}.\vec{n}} = \frac{\left|2+2-1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}.\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30^0$

3. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P)

Vì (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (Q) chứa điểm $(-1; -1; 3) \in d$ và có VTPT là $\left[\vec{u}.\vec{n}\right] = (-3; 3; 3)$

Chọn 1 VTPT của (Q) là: $(-1; 1; 1)$

Phương trình mặt phẳng (Q): $x - y - z + 3 = 0$

4. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P)

d' chính là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q) nên d' có phương trình

tham số: $\begin{cases} x = -\frac{11}{3} + t \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = t \end{cases}$ $(t \in R)$

5. Viết phương trình đường thẳng nằm trong (P) chứa điểm A và vuông góc với đường thẳng d

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$, Δ nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với d. Khi đó Δ có VTCP là: $\frac{1}{3}\left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1; 1; 1)$

Δ có phương trình chính tắc là: $\frac{x + \frac{1}{3}}{-1} = \frac{y + \frac{2}{3}}{1} = \frac{z - \frac{10}{3}}{1}$

6. Viết phương trình mặt cầu tâm I nằm trên đường thẳng d, tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính R = $\sqrt{6}$

Vì I ∈ d nên I(−1 + 2t; −1 + t; 3 + t)

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính R = $\sqrt{6}$

Khi và chỉ khi d(I; (P)) = $\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1+2t-2+2t-3-t+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{7}{3} \\ t=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Ta được 2 điểm I có tọa độ $\left(\frac{11}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$ và $\left(-\frac{13}{3};-\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$

Ta được 2 mặt cầu thỏa mãn điều kiện bài toán có phương trình:

$$\left(x-\frac{11}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{16}{3}\right)^2=6$$

Và $\left(x+\frac{13}{3}\right)^2+\left(y+\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{4}{3}\right)^2=6$

7. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất

Bài này đã giải ở phần I: Vì mặt phẳng (R) phải lập chứa đường thẳng d nên (R) chứa 2 điểm M(−1; −1; 3), N(1; 0; 4) nằm trên d

Mặt phẳng (R): Ax + By + Cz + D = 0 với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, cho M, N ∈ (R)

Ta được: C = −(2A + B), D = 7A + 4B

Gọi α là góc giữa mặt phẳng (R) và (P): α ∈ $[0^0, 90^0]$

$$\cos\alpha = \frac{|A+B|}{\sqrt{5A^2+2B^2+4AB}}.\frac{3}{\sqrt{6}}$$

Trường hợp 1: A + B = 0 được α = 90^0 không phải là góc nhỏ nhất có thể có giữa 2 mặt phẳng (P) và (R)

Trường hợp 2: A + B ≠ 0: $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{1}{2+3\left(\frac{A}{A+B}\right)^2}} \le \frac{3}{\sqrt{6}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha \ge 30^0 \Rightarrow \text{Min}\alpha = 30^0$ đạt được khi $\begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$

Chọn B = 1 được C = −1, D = 4

Mặt phẳng phải lập có phương trình: y − z + 4 = 0

Bài 30: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 2 điểm A(3; 3; 1), B(0; 2; 1) và mặt phẳng (P): x + y + z − 7 = 0. Làm các câu hỏi sau:

1. Viết phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3 - t \quad (t \in R) \\ z = 1 \end{cases}$

2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của AB trên (P)

Vì A ∈ (P). Tìm H là hình chiếu của B trên mặt phẳng (P)

Tìm được điểm H (3 cách): $H\left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng qua AH chính là đường thẳng hình chiếu của AB trên (P):

$$AH: \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 3 - t \quad (t \in R) \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

3. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) mà mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B

Vì d ⊂ (P) và d cách đều A, B nên d nằm trong mặt phẳng (Π) là mặt phẳng trung trực của AB

Phương trình mặt phẳng (Π): $3x + y - 7 = 0$

Vậy d = (Π) ∩ (P): d có phương trình là: $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \quad (t \in R) \\ z = 2t \end{cases}$

4. Viết phương trình đường vuông góc chung của AB và d

Vì AB ⊥ (Π) mà d ⊂ mặt phẳng (Π), trong (Π) kẻ đường thẳng IM ⊥ d (M ∈ d). Thì IM chính là đường vuông góc chung của AB và d.

Trên đường thẳng d lấy điểm M(t; 7 – 3t; 2t) ta có

$\overrightarrow{IM} = \left(t - \frac{3}{2}; \frac{9}{2} - 3t; 2t - 1\right)$. Tìm điểm I để IM ⊥ d $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17}{4}$.

Ta được $\overrightarrow{IM} = \left(-\frac{4}{14}; \frac{12}{14}; \frac{20}{14}\right)$ chọn VTCP của IM là $\vec{a} = (-1; 3; 5)$

Đường vuông góc chung của AB và d có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \\ y = \frac{5}{2} + 3t \quad (t \in R) \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

5. Tìm điểm K thuộc đường thẳng AB (K ≠ B) sao cho:

$d(K; (P)) = d(B; (P)$ (1)

Cách 1: Trên AB lấy điểm K di động, tìm điểm K để thỏa mãn (1)

– $K \in AB$ nên $K(3 - 3t; 3 - t; 1)$

– $d(K; (P)) = d(B; (P)) \Leftrightarrow \dfrac{|3 - 3t + 3 - t + 1 - 7|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|0 + 2 + 1 - 7|}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |-4t| = |-4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ ta được $K(0; 2; 1) \equiv B$ (loại)

$t = -1$ ta được $K(6; 4; 1) \neq B$

Vậy ta được 1 điểm K phải tìm $K(6; 4; 1)$

Cách 2: Vì $A \in (P)$ nên $d(K; (P)) = d(B; (P))$ khi và chỉ khi A là trung điểm của KB từ đó ta được $K(6; 4; 1)$

6. Tìm điểm C trên đường thẳng d để tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất

Với $C \in d$ thì diện tích $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}$ AB.CI. Do AB không đổi nên diện tích ΔABC nhỏ nhất khi và chỉ khi IC nhỏ nhất. Tức C là hình chiếu của I trên d. Vậy C chính là điểm M tìm được ở câu 4. Ta được điểm C có tọa độ $C\left(\dfrac{17}{14}; \dfrac{47}{14}; \dfrac{34}{14}\right)$.

Bài 31: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 2 đường thẳng:

d_1: $x = \dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z + 4}{2}$; d_2: $\dfrac{x + 8}{2} = y - 6 = \dfrac{z - 10}{-1}$. Giải các câu hỏi sau:

1. Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(0; 2; -4)$ và có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_1} = (1; -1; 2)$

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(-8; 6; 10)$ có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_2} = (2; 1; -1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1; 5; 3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-8; 4; 14)$ nên $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{M_1M_2} = 70 \neq 0$.

Chứng tỏ 3 véc tơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng nên d_1 chéo d_2

2. Viết phương trình mặt phẳng chứa d_2 và song song với đường thẳng d_1

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 nên (α) đi qua điểm M_2 và nhận $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ làm cặp VTCP nên nhận $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1; 5; 3)$ làm một VTPT (α) có phương trình: $x - 5y - 3z + 68 = 0$.

3. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1 và d_2

Vì d_1 // (α) nên mọi điểm nằm trên d_1 cách đều mặt phẳng (α).

Vậy $d(d_1; d_2) = d(d_1; (\alpha)) = d(M_1; (\alpha)) = \dfrac{|0 - 10 + 12 + 68|}{\sqrt{1 + 25 + 9}} = \dfrac{70}{\sqrt{35}} = 2\sqrt{35}$

4. Viết phương trình đường thẳng d song song với trục Ox, cắt d_1 tại M, cắt d_2 tại N. Tìm tọa độ các điểm M, N

Phương trình tham số của d_1: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$ $(t \in R)$, d_2: $\begin{cases} x = -8 + 2t' \\ y = 6 + t' \\ z = 10 - t' \end{cases}$ $(t' \in R)$

Trên d_1 lấy điểm M di động $M(t; 2 - t; -4 + 2t)$

Trên d_2 lấy điểm N di động $N(-8 + 2t'; 6 + t'; 10 - t')$

Lập $\overrightarrow{MN} = (-8 + 2t' - t; 4 + t' + t; 14 - t' - 2t)$

Đường thẳng qua M, N là đường thẳng d khi MN // Ox hay véc tơ $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{i} = (1; 0; 0)$ cùng phương, nghĩa là: $\begin{cases} t' + t = -4 \\ t' + 2t = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 18 \\ t' = -22 \end{cases}$

Ta được $M(18; -16; 32) \in d_1$ và $N(-52; -16; 32)$ và đường thẳng d có phương trình d: $\begin{cases} x = 18 + t \\ y = -16 \\ z = 32 \end{cases}$ $(t \in R)$

5. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 ($A \in d_1$, $B \in d_2$). Hãy viết phương trình mặt cầu đường kính AB

Lấy điểm $A \in d_1$, $A(t; 2 - t; -4 + 2t)$

$B \in d_2$, $B(-8 + 2t'; 6 + t'; 10 - t')$

$\overrightarrow{AB} = (-8 + 2t' - t; 4 + t' + t; 14 - t' - 2t)$

Tìm A, B để $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t + t' = 16 \\ t + 6t' = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 4 \end{cases}$

Ta được: $A(2; 0; 0) \in d_1$

$B(0; 10; 6) \in d_2$ mà AB vuông góc với d_1 và d_2

Do đó AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 nên mặt cầu (S) đường kính AB có tâm I là trung điểm của AB, $I(1; 5; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{35}$

(S) có phương trình: $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 = 35$.

10 bài tập tổng hợp tự luyện tập

Bài 32: Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình d: $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$

(P): $3x + 5y - z - 2 = 0$

1) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P). Tìm góc giữa d và (P).

2) Viết phương trình mặt phẳng (P') đi qua điểm $M_0(1; 2; -1)$ và vuông góc với đường thẳng d.

3) Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P).

4) Cho điểm B(1; 0; −1) hãy tìm tọa độ điểm B' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn BB'.

5) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc và cắt đường thẳng d.

Hướng dẫn giải

1) $d \cap (P) = A(0; 0; -2)$

α là góc nhọn giữa d và mặt phẳng (P)

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}$$

2) Phương trình mặt phẳng (P'): $4x + 3y + z - 9 = 0$

3) Phương trình d' là hình chiếu của d trên (P)

$$d': \begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases} \quad (t \in R)$$

4) (P) là mặt phẳng trung trực của BB' khi và chỉ khi BB' ⊥ (P) và giao điểm của BB' với (P) là trung điểm của đoạn BB'

– Lập phương trình BB': $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in R)$

– H là giao điểm của BB' với (P): $H\left(\frac{29}{35}; -\frac{2}{7}; -\frac{33}{35}\right)$

– H là trung điểm của BB': $B'\left(\frac{23}{35}; -\frac{4}{7}; -\frac{31}{35}\right)$

5) Đường thẳng Δ phải tìm nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời nằm trong mặt phẳng (R) đi qua A(0; 0; –2) và vuông góc với d

Vậy Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng (R) và (P)

Phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x = 8t \\ y = -7t \\ z = -2 - 11t \end{cases} \quad (t \in R)$

Bài 33: Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 mặt phẳng:

(α): $2x - y + 3z + 1 = 0$, (α'): $x - y + z + 5 = 0$ và điểm M(1; 0; 5)

1) Chứng minh (α) và (α') cắt nhau. Tìm góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (α')

2) Viết phương trình tham số của giao tuyến Δ của (α) và (α')

3) Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α), K là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α'). Tính độ dài đoạn HK

4) Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ

5) Viết phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và cắt Δ

6) Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của (α) và (α') và vuông góc với mặt phẳng (P): $3x - y + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

1) Lấy VTPT của (α) và (α'). Chứng minh $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ không cùng phương. Do $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \neq \vec{0}$ nên (α) cắt (α') và góc giữa 2 mặt phẳng là α:

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$$

2) Phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in R)$

3) $H\left(-\frac{11}{7}; \frac{9}{7}; \frac{9}{7}\right)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{11}{3}; \frac{4}{3}\right)$

$$HK = \frac{\sqrt{3045}}{21}$$

4) $d(M; \Delta) = \frac{\sqrt{145}}{\sqrt{3}}$

5) Δ' đi qua M, Δ' ⊥ Δ, Δ' cắt Δ có phương trình là: $\frac{x-1}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z-5}{5}$

6) Mặt phẳng (R) phải lập có phương trình: $x + 3y + 5z - 31 = 0$

Bài 34: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t\,(t \in R) \\ z = 4 \end{cases}$$

Δ' là giao tuyến của 2 mặt phẳng (α): $x - 3y + z = 0$, (α'): $x + y - z + 4 = 0$

Và điểm M(1; 1; 2)

1) Xét vị trí tương đối của 2 đường thẳng Δ và Δ'
2) Viết phương trình mặt phẳng chứa Δ' và song song với Δ
3) Viết phương trình mặt phẳng qua M_0 và vuông góc với Δ
4) Viết phương trình đường thẳng qua M_0 và cắt cả Δ và Δ'
5) Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'
6) Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ và Δ'

Hướng dẫn giải

1) Δ và Δ' chéo nhau
2) Gọi (P) là mặt phẳng phải lập (P): $4x - 2y - z + 10 = 0$
3) Gọi (Q) là mặt phẳng phải lập (Q): $x + 2y - 3 = 0$
4) Phương trình đường thẳng d phải lập: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \quad (t \in R) \\ z = t \end{cases}$
5) $d(\Delta; \Delta') = \dfrac{20\sqrt{21}}{21}$
6) Phương trình đường vuông góc chung của Δ và Δ': $\begin{cases} x = \dfrac{23}{7} - 4t \\ y = -\dfrac{3}{7} + 2t\,(t \in R) \\ z = 4 + t \end{cases}$

Bài 35: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 4 điểm A(–2; 1; 2), B(0; 4; 1), C(5; 1; –5), D(–2; 8; –5) và đường thẳng d:

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+11}{5} = \frac{z-9}{-4}$$

1) Chứng minh A, B, C, D là 4 đỉnh của khối tứ diện
2) Tính thể tích khối tứ diện ABCD
3) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD
4) Tìm tọa độ các giao điểm M, N của đường thẳng d với mặt cầu (S)
5) Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M, N, tìm góc tạo bởi 2 mặt phẳng đó

Hướng dẫn giải

1) Tính $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD} = 196 \neq 0$ nên A, B, C, D là 4 đỉnh của khối tứ diện

2) $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{98}{3}$

3) Tâm $I(-2; 1; -5)$ của (S). Bán kính $R = 7$

   Phương trình (S): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$

4) d cắt (S) tại 2 điểm $M(1; -1; 1)$, $N(4; 4; -3)$

5) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại M là (P): $3x - 2y + 6z - 11 = 0$

   Phương trình mặt phẳng (Q) tiếp xúc với (S) tại N

   (Q): $6x + 3y + 2z - 30 = 0$

   φ là góc nhọn giữa (P) và (Q)

   $\cos\varphi = \dfrac{24}{49}$

Bài 36: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Xét 2 điểm M trên AD' và N trên DB sao cho $AM = DN = k$ với $0 < k < a\sqrt{2}$. Gọi P là trung điểm của B'C'.

1) Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AP và BC'.
2) Tính thể tích khối tứ diện APBC'.
3) Chứng minh MN luôn luôn song song với mặt phẳng (A'D'CB) khi k thay đổi.
4) Tìm k để đoạn MN ngắn nhất.
5) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AD' và DB, đồng thời MN song song với A'C.

Hướng dẫn giải

1) Đặt khối lập phương ABCD.A'B'C'D' vào hệ trục Oxyz

   Với $A \equiv O(0; 0; 0)$, $B \in$ tia Ox. $B(a; 0; 0)$, $D \in$ tia Oy. $D(0; a; 0)$

   $C(a; a; 0)$, $A' \in$ tia Oz. $A'(0; 0; a)$, $B'(a; 0; a)$, $D'(0; a; a)$, $C'(a; a; a)$

   $P\left(a; \dfrac{a}{2}; a\right)$ (với $a > 0$)

   α là góc nhọn, giữa AP và BC'. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

2) $V_{APBC'} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC'}\right| = \dfrac{a^3}{12}$ (đvtt)

3) Mặt phẳng (A'D'CB) song song với trục Oy nên có phương trình:

   (R): $px + qz + n = 0$ $(n \neq 0, p^2 + q^2 > 0)$

   Cho mặt phẳng (R) đi qua A', B, C nên $p = q$ và $n = -pa$

   Cho $p = 1$ ta được (R): $x + z - a = 0$ có VTPT: $\vec{n} = (1; 0; 1)$

   Vì $M \in AD'$, $N \in DB$ và $AM = DN = 1$ nên tính được

$M\left(0;\frac{k}{\sqrt{2}};\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$, $N\left(\frac{k}{\sqrt{2}};\frac{a\sqrt{2}-k}{\sqrt{2}};0\right)$

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{k}{\sqrt{2}};\frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}};-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có $\overrightarrow{MN}.\vec{n}=1.\frac{k}{\sqrt{2}}+0.\left(\frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}}\right)+1\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)=0$ nên $\overrightarrow{MN}\perp\vec{n}$ và $N\notin(R)$. Do đó MN song song với mặt phẳng (A'D'CB)

4) $MN^2=3k^2-2a\sqrt{2}\,k+a^2=3\left[\left(k-\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2+\frac{a^2}{9}\right]\geq\frac{a^2}{3}$

$MN\geq\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $\min MN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ đạt được khi $k=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ thỏa mãn điều kiện $K\in(a;a\sqrt{2})$

5) Khi $k=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};-\frac{a}{3}\right)$, $\overrightarrow{AD'}=(0;a;a)$

$\overrightarrow{DB}=(a;-a;0)$ ta có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'}=0$, $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB}=0$

Vậy MN là đường vuông góc chung của AD' và DB

Mặt khác $\overrightarrow{A'C}=(a;a;-a)=3\overrightarrow{MN}$. Chứng tỏ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'C}$ cùng phương

Do $N\notin A'C$ nên MN // A'C.

Bài 37: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho sáu điểm:

A(2; 0; 0), A'(6; 0; 0), B(0; 3; 0), B'(0; 4; 0), C(0; 0; 3) và C'(0; 0; 4)

1) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (A'B'C'). Tính côsi của góc giữa 2 mặt phẳng đó.

2) Viết phương trình giao tuyến của 2 mặt phẳng (ABC) và (A'B'C'). Tín khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng Δ

3) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, H' là trực tâm của ΔA'B'C'. Chứn minh rằng 3 điểm O, G, H' thẳng hàng. Xác định tọa độ điểm H'

4) Gọi O' là điểm đối xứng của O qua mặt phẳng (ABC). Điểm O' có thuộ mặt phẳng (A'B'C') không?

5) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, A', B, C. Chứng min rằng mặt cầu đó cũng đi qua B' và C'

6) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song vó mặt phẳng tọa độ (Oxy)

Hướng dẫn giải

1) Lập mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') có phương trình theo đoạn chắn:

(ABC): $3x + 2y + 2z - 6 = 0$ có 1 VTPT là $\vec{n} = (3; 2; 2)$

(A'B'C'): $2x + 3y + 3z - 12 = 0$ có 1 VTPT là $\vec{n} = (2; 3; 3)$

Gọi φ là góc nhọn giữa 2 mặt phẳng đó. $\cos\varphi = \dfrac{18}{\sqrt{374}}$

2) Gọi Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng (ABC) và (A'B'C')

Phương trình Δ: $\begin{cases} x = -\dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{24}{5} - t \ \ (t \in R) \\ z = t \end{cases}$

$d(0; \Delta) = \dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{OI}, \vec{u}\right]\right\|}{|\vec{u}|} = \dfrac{18}{5}$ ($\vec{u}$ là VTCP của Δ)

3) $G\left(\dfrac{2}{3}; 1; 1\right)$

Do $\vec{n'} = 3\overrightarrow{OG}$ nên $OG \perp (A'B'C')$

Mặt khác tứ diện OA'B'C' vuông tại O nên trực tâm H' của ΔA'B'C' là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (A'B'C'). Do đó 3 điểm O, G, H' thẳng hàng và $H'\left(\dfrac{12}{11}; \dfrac{18}{11}; \dfrac{18}{11}\right)$

4) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (ABC) ta được:

$H\left(\dfrac{18}{17}; \dfrac{12}{17}; \dfrac{12}{17}\right)$ từ đó tìm được O' là điểm đối xứng của O qua (ABC)

$O'\left(\dfrac{36}{17}; \dfrac{24}{17}; \dfrac{24}{17}\right)$. Thay tọa độ của O' vào phương trình mặt phẳng (A'B'C') không thỏa mãn. Vậy O' không thuộc mặt phẳng (A'B'C')

5) Mặt cầu (S) có tâm $I\left(4; \dfrac{7}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{114}}{2}$

Phương trình (S): $(x - 4)^2 + \left(y - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{114}{4}$

Thay tọa độ B', C' vào phương trình (S) thỏa mãn vậy B', C' nằm trên mặt cầu (S)

6) Gọi mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (Oxy):

(α): $z + D = 0$ ($D \neq 0$)

(α) tiếp xúc (S) khi và chỉ khi $d(I; (\alpha)) = R \Leftrightarrow D = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{114}}{2}$

Được 2 mặt phẳng phải lập có phương trình: $z - \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{114}}{2} = 0$

Bài 38: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 3 điểm A(4; –1; 2), B(1; 2; 2) và C(1; –1; 5)

1) Chứng minh rằng tam giác ABC đều

2) Viết phương trình mặt phẳng (ABC). Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng tọa độ

3) Viết phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC

4) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ diện ABCD là tứ diện đều

Hướng dẫn giải

1) Chứng minh A, B, C là 3 đỉnh của tam giác

Tính AB, AC, BC: Ta được $AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$

Vậy ΔABC đều

2) Phương trình mặt phẳng (ABC): $x + y + z - 5 = 0$

(ABC) cắt 3 trục tọa độ tại 3 điểm M(5; 0; 0), N(0; 5; 0), P(0; 0; 5) nên

$V_{OMNP} = \frac{1}{3}OM.ON.OP = \frac{125}{6}$ (đvtt)

3) Phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là đường thẳng Δ đi qua tâm của tam giác đều ABC và $\Delta \perp (ABC)$

$$(\Delta)\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \qquad (t \in R) \\ z = 3 + t \end{cases}$$

4) Tìm điểm D để tứ diện ABCD đều

Điểm $D \in \Delta$ thì DA = DB = DC. Lấy điểm $D \in \Delta$, tứ diện ABCD đều khi và chỉ khi $DA = 3\sqrt{2}$ giải phương trình tìm được 2 điểm D có tọa độ (4; 2; 5), (0; –2; 1)

Bài 39: Trong không gian cho 2 điểm A(1; –3; –1) và B(–2; 1; 3)

1) Chứng tỏ rằng 2 điểm A, B cách đều trục Oz

2) Tìm điểm C nằm trên trục Oz để tam giá ABC vuông tại C

3) Viết phương trình hình chiếu của đường AB lên mặt phẳng (Oyz)

4) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm O, A, B và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy)

Hướng dẫn giải

1) Tính d(A; Oz) = d(B; Oz) = $\sqrt{10}$

2) Gọi C(0; 0; z_0) ∈ Oz để ΔABC vuông tại C khi và chỉ khi $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$ được 2 điểm C có tọa độ C(0; 0; 4) và C(0; 0; −2)

3) Phương trình hình chiếu vuông góc của AB lên mặt phẳng (yOz) là:

$$A'B': \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \quad (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

4) Phương trình mặt cầu (S): $\left(x + \frac{53}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{18}{5}\right)^2 + z^2 = \frac{4105}{100}$

Bài 40: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a

1) Chứng minh rằng đường chéo A'C vuông góc với mặt phẳng (BDC')

2) Chứng minh rằng giao điểm của đường chéo A'C và mặt phẳng (BDC') là trọng tâm của tam giác BDC'

3) Chứng minh rằng mặt phẳng (AB'D') song song với mặt phẳng (C'BD). Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng đó

4) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AC và C'D

Hướng dẫn giải

Đặt hình lập phương ABCD.A'B'C'D' vào hệ trục Oxyz với A ≡ O(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; a) với a > 0. Ta được tọa độ các đỉnh còn lại của hình lập phương.

1) VTCP của A'C là $\vec{u} = (a; a; -a)$

Tính VTPT của mặt phẳng (BDC') là $\vec{n} = (a^2; a^2; -a^2)$

Ta có $\vec{n} = a\vec{u}$

Vậy $\vec{n}$ và $\vec{u}$ cùng phương nên A'C ⊥ mặt phẳng (BDC')

2) Tọa độ trọng tâm của ΔBDC' là $G\left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}\right)$

Phương trình mặt phẳng (BDC'): $x + y - z - a = 0$

$$\text{Phương trình } A'C: \begin{cases} x = a + t \\ y = a + t \ (t \in R) \\ z = -t \end{cases}$$

A'C ∩ (BDC') tại điểm có tọa độ $\left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}\right) \equiv G$

3) Có thể chứng minh (AB'D') // (C'BD) bằng phương pháp hình học trong quan hệ vuông góc hoặc 2 VTPT của chúng cùng phương:

$d((AB'D'); (C'BD)) = d(0; (BDC')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

4) Chứng minh AC và C'D là chéo nhau

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau t được: $d(AC; C'D) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài tập tự luyện tập tổng hợp

Trong không gian với hệ trục Oxyz cho các điểm:

$A(1; 2; 2)$, $B(-1; 2; -1)$, $C(1; 6; 1)$, $D(-1; 6; 2)$

1) Chứng minh rằng ABCD là khối tứ diện. Tìm trọng tâm G của khối tứ diện ABCD
2) Tính các góc của tam giác ABC. Tính góc giữa các đường thẳng AB v CD, AD và BC, AC và BD. Tính góc giữa AC với mặt phẳng (BCD). Tính góc giữa 2 mặt phẳng (ACD) và (BCD)
3) Tính thể tích của khối tứ diện ABCD
4) Tính độ dài đường cao hạ từ A của khối tứ diện ABCD
5) Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua BC
6) Tìm tọa độ điểm A_0 đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (BCD)
7) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD
8) Viết phương trình đường vuông góc chung của AB và CD
9) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của AB lên mặt phẳng (BCD)
10) Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp khối tứ diện ABCD
11) Viết phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của AB và CD làm đường kính
12) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A
13) Viết phương trình mặt phẳng qua tâm J của mặt cầu nội tiếp hình tứ diện ABCD và chứa cạnh CD
14) Viết phương trình đường thẳng Δ_1 qua trọng tâm của tam giác BCD v vuông góc với mặt phẳng (BCD)
15) Viết phương trình đường thẳng Δ_2 qua tâm I của mặt cầu (S) và Δ_2 cắt 2 đường thẳng BC và AD
16) Tìm điểm M trên mặt phẳng (BCD) để tam giác ABM đều? vuông?
17) Xác định tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) với mặt phẳng (ACD)
18) Tìm điểm M trong không gian sao cho:
$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4$$
19) Tìm điểm S trong không gian để $\left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất
20) Cho mặt phẳng (P): $x + y + z = 0$. Tìm điểm K nằm trong mặt phẳng (P) để KA + KB đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm điểm M nằm trong mặt phẳng (P) để $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

PHẦN PHỤ LỤC. CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC

PHẦN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Một số điểm chú ý:

– Trong đề thi nếu có 2 phần tự chọn: Theo chương trình nâng cao: Kí hiệu phần I, phần theo chương trình chuẩn: Kí hiệu phần II.

– Có 1 số bài đề thi ra hình chóp, hình lăng trụ nhưng có thể dùng phương pháp tọa độ nên được xếp vào phần này để độc giả nghiên cứu, kí hiệu III

Năm 2010

Ban A:

) Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(0; 0; –2) và đường thẳng Δ: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại 2 điểm B, C sao cho BC = 8

I) Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): x – 2y + z = 0. Gọi C là giao điểm của Δ với (P). M là điểm thuộc Δ, tính khoảng cách từ M đến (P). Biết MC = $\sqrt{6}$

II) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD, H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDMN và tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng DM và SC theo a.

Ban B:

I) Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng Δ: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM

II) Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với b, c > 0 và mặt phẳng (P): y – z + 1 = 0. Xác định b, c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$

Khối D:

I) Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in R)$ và

Δ_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$

Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1

II) Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 mặt phẳng:

(P): $x + y + z - 3 = 0$ và (Q): $x - y + z - 1 = 0$

Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2

III) Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC, chứng minh M là trung điểm của SA. Và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Năm 2009

Ban A:

I) Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ v 2 đường thẳng Δ_1: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+9}{6}$, Δ_2: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1, sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

II) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ v mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặ phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm v bán kính của đường tròn đó.

Ban B:

I) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P):

$x - 2y + 2z - 5 = 0$ và 2 điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$

Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P). Hãy viết phươn trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

II) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho tứ diện ABCD có các đỉn $A(1; 2; 1)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(2; -1; 1)$, $D(0; 3; 1)$ viết phương trình mặ phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoản cách từ D đến (P).

an D:

) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 3z + 4 = 0$
Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

I) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho các điểm A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0) và mặt phẳng (P): $x + y + z - 20 = 0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

Năm 2008

an A:

) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng d:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$$

) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d

) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

I) Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính côsin của góc giữa 2 đường thẳng AA' và B'C'

hối B

ài I và II) Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho 3 điểm A(0; 1; 2), B(2; –2; 1), C(–2; 0; 1)

) Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C

) Tìm điểm M thuộc mặt phẳng $2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho: MA = MB = MC

II) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp SBMDN và tính côsin của góc giữa 2 đường thẳng SM, DN

hối D:

ài I, II) Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho 4 điểm:
A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3)

) Viết phương trình mặt cầu qua 4 điểm A, B, C, D

) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

II) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông AB = BC = a, cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM, BC.

Năm 2007

Khối A:

Bài I, II) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \quad (t \in R) \\ z = 3 \end{cases}$$

1) Chứng minh d_1 chéo d_2

2) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): $7x + y - 4z = 0$ và cắt 2 đường thẳng d_1 và d_2

Bài III) Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Khối B:

Bài I, II) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$

và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$

1) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất

Bài III) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và AC

Khối D:

Bài I, II): Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 điểm A(1; 4; 2), B(–1; 2; 4) và đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$

1) Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB)

Bài III) Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Năm 2006

Khối A: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD

1) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng A'C và MN

2) Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Khối B:

Bài I và II) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm A(0; 1; 2) và 2 đường thẳng d_1: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$, d_2: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \quad (t \in R) \\ z = 2 + t \end{cases}$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với d_1 và d_2

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho 3 điểm A, M, N thẳng hàng

Bài III) Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Khối D:

Bài I, II) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm A(1; 2; 3) và 2 đường thẳng d_1: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$, d_2: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{1}$

1) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1

2) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2

Năm 2005

Khối A: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 9 = 0$

a) Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2

b) Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d với mặt phẳng (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), biết Δ đi qua A và vuông góc với đường thẳng d.

Khối B: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với a(0; –3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), B(4; 0; 4)

a) Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1)

b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, M và song song với BC_1. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN

Khối D: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 2 đường thẳng:

d_1: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ và d_2: $\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả 2 đường thẳng d_1 và d_2

b) Mặt phẳng Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A, B. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

Năm 2004

Khối A: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm cạnh SC

a) Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BM

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN

Khối B: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm A(4; –2; 4) và đường thẳng d: $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \qquad (t \in R) \\ z=-1+4t \end{cases}$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt và vuông góc với đường thẳng d

Khối D:

1) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Biết A(a; 0; 0), B(–a; 0; 0), C(0; 1; 0), B_1(–a; 0; b) a, b > 0

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b

b) Cho a, b thay đổi luôn thỏa mãn a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất

2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 3 điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P): x + y + z – 2 = 0. Viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm nằm trong mặt phẳng (P)

Năm 2003

Khối A: Trong không gian Oxyz với hệ trục Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, B(a; 0; 0), D'(0; a; 0), A'(0; 0; b) (với a, b > 0). Gọi M là trung điểm của cạnh CC'

a) Tính thẻ tích của khối tứ diện BDA'M theo a và b

b) Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau

Khối B: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 2 điểm A(2; 0; 0), B(0; 0; 8) và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA

Khối D: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho đường thẳng:

$$d_k: \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0 \\ kx - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Tìm k để d_k vuông góc với mặt phẳng (P): $x - y - 2z + 5 = 0$

Năm 2002

Khối A: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và } \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2

b) Cho 2 điểm M(2; 1; 4) tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn MH có độ dài nhỏ nhất

Khối B: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a

a) Tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng A_1B và B_1D

b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh B_1B, CP, A_1D_1. Tính góc giữa 2 đường thẳng MP và C_1N

Khối D: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng

$$d_m: \begin{cases} (2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases} \text{(với m là tham số)}$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P)